

# Quantum Phase Estimation



La Quantum Fourier Transform è centrale a diversi algoritmi di computazione quantistica.

La prima applicazione della QFT di cui ci occuperemo è la "Quantum Phase Estimation" che a sua volta è centrale a diversi algoritmi.

Si consideri un operatore unitario  $U$  con autovettore  $|u\rangle$  e autovalore  $e^{2\pi i\varphi}$ , con il valore della fase  $\varphi$  incognito.

L'obiettivo dell'algoritmo di "Quantum Phase Estimation" è proprio la stima di  $\varphi$ .



# Quantum Phase Estimation



Per realizzare la stima assumiamo di avere delle scatole nere (black boxes o oracles) che possano preparare lo stato  $|u\rangle$  e realizzare l'operazione di controllo  $U^2$ , per opportuni valori interi non-negativi  $j$ .

I black boxes ( e gli operatori in essi contenuti) non costituiscono la parte centrale della QPE, ma rappresentano delle operazioni di supporto e preparazione all'algoritmo di QPE. Questi "black box" verranno dettagliati per le varie applicazioni particolari della QPE.



# Quantum Phase Estimation



La procedura di stima della fase quantistica utilizza due registri:

- 1 Il primo registro contiene  $t$  qubits inizialmente nello stato  $|0\rangle$ .  
La scelta di  $t$  dipende da:
  - il numero di cifre (precisione) con cui si vuole stimare  $\varphi$
  - la probabilità di successo della procedura di stima della fase.Questi due elementi dipendono da  $t$  come si vedrà in seguito.
- 2 Il secondo registro contiene lo stato  $|u\rangle$  che definisce quindi il numero di qubits nel registro.



# Quantum Phase Estimation

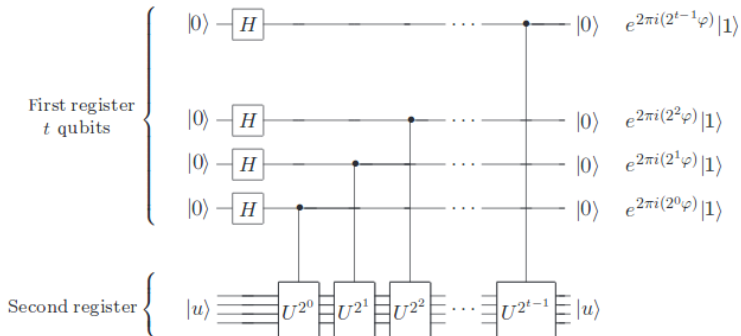


Figure 5.2. The first stage of the phase estimation procedure. Normalization factors of  $1/\sqrt{2}$  have been omitted, on the right.



# Quantum Phase Estimation



La procedura di stima della fase quantistica utilizza due registri:

- 1 La prima parte dell'algoritmo QPE consiste nell'applicazione in cascata:
  - operatore di Hadamard al primo registro
  - operatore  $U$  controllato al secondo registro con  $U$  elevato al quadrato (potenze di due) in successione.

Lo stato finale del primo registro diventa:

$$\frac{1}{2^{t/2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i 2^{t-1} \varphi} |1\rangle \right) \left( |0\rangle + e^{2\pi i 2^{t-2} \varphi} |1\rangle \right) \dots \left( |0\rangle + e^{2\pi i 2^0 \varphi} |1\rangle \right) \\ = \frac{1}{2^{t/2}} \sum_{k=0}^{2^t-1} e^{2\pi i \varphi k} |k\rangle$$



# Quantum Phase Estimation



L'algoritmo QPE opera in tre fasi successive:

- 1 La prima parte dell'algoritmo QPE consiste nell'applicazione in cascata:
  - operatore di Hadamard al primo registro
  - operatore  $U$  controllato al secondo registro con  $U$  elevato al quadrato (potenze di due) in successione.
- 2 La seconda parte della QPE consiste nell'applicazione della Quantum Fourier Transform inversa al primo registro. La Quantum Fourier Transform inversa è ottenuta invertendo il circuito della QFT, ed è eseguita in un numero di passi computazionali pari a  $\Theta(t^2)$ .
- 3 La terza parte della QPE consiste nella lettura dello stato del primo registro nella base computazionale. Questa fornisce una buona stima di  $\varphi$ .



# Quantum Phase Estimation

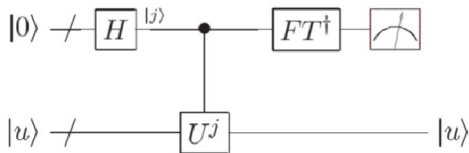


Figure 5.3. Schematic of the overall phase estimation procedure. The top  $t$  qubits (the ‘/’ denotes a bundle of wires, as usual) are the first register, and the bottom qubits are the second register, numbering as many as need to perform  $U$ .  $|u\rangle$  is an eigenstate of  $U$  with eigenvalue  $e^{2\pi i\varphi}$ . The output of the measurement is an approximation to  $\varphi$  accurate to  $t - \lceil \log(2 + \frac{1}{\epsilon}) \rceil$  bits, with probability of success at least  $1 - \epsilon$ .



# Quantum Phase Estimation



Per capire meglio come funziona l'algoritmo QPE, riscriviamo lo stato finale del primo registro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{t/2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i 2^{t-1} \varphi} |1\rangle \right) \left( |0\rangle + e^{2\pi i 2^{t-2} \varphi} |1\rangle \right) \dots \left( |0\rangle + e^{2\pi i 2^0 \varphi} |1\rangle \right) \\ = \frac{1}{2^{t/2}} \sum_{k=0}^{2^t-1} e^{2\pi i \varphi k} |k\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Supponiamo che  $\varphi$  possa essere espressa esattamente in  $t$  bits nella forma  $\varphi = 0.\varphi_1 \dots \varphi_t$ . L'Eq.(2) fornisce lo stato all'uscita della prima fase dell'algoritmo, si può riscrivere:

$$\frac{1}{2^{t/2}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i 0.\varphi_t} |1\rangle \right) \left( |0\rangle + e^{2\pi i 0.\varphi_{t-1}\varphi_t} |1\rangle \right) \dots \left( |0\rangle + e^{2\pi i 0.\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_t} |1\rangle \right)$$





# Quantum Phase Estimation



Il secondo step dell'algoritmo QPE applica la QFT inversa produce quindi un vettore che è quello di input della QFT diretta (che riportiamo qui per chiarezza):

$$|j_1, \dots, j_n\rangle \rightarrow \frac{(|0\rangle + e^{2\pi i 0 \cdot j_n} |1\rangle) (|0\rangle + e^{2\pi i 0 \cdot j_{n-1} j_n} |1\rangle) \dots (|0\rangle + e^{2\pi i 0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n} |1\rangle)}{2^{n/2}} \quad (4)$$

pertanto lo stato di output della seconda parte della QPE è  $|\varphi_1 \dots \varphi_t\rangle$ , che quindi corrisponde alla stima di  $\varphi$  nella base computazionale.



# Quantum Phase Estimation



In conclusione, l'algoritmo di stima della fase quantistica permette di misurare la fase  $\varphi$  di un autovalore dell'operatore unitario  $U$ , corrispondente all'autovettore  $|u\rangle$ .

La parte centrale della procedura di stima della fase risiede nell'abilità della trasformata di Fourier inversa di eseguire la trasformazione:

$$\frac{1}{2^{t/2}} \sum_{j=0}^{2^t-1} e^{2\pi i \varphi j} |j\rangle |u\rangle \rightarrow |\tilde{\varphi}\rangle |u\rangle \quad (5)$$

dove  $|\tilde{\varphi}\rangle$  indica uno stato che rappresenta una buona stima di  $\varphi$ .



# Quantum Phase Estimation: Accuratezza e probabilità di successo



L'analisi precedente si applica al caso ideale, in cui  $\varphi$  può essere scritto esattamente con un'espansione binaria di  $t$  bit.

Cosa succede quando questa condizione non è verificata?

La procedura che abbiamo descritto produrrà un'approssimazione abbastanza buona di  $\varphi$  con una certa probabilità associata.

Supponiamo di voler approssimare  $\varphi$  con una precisione  $2^{-n}$ .

Per ottenere  $\varphi$  accurato a  $n$  bit con probabilità di successo almeno  $1 - \epsilon$  si devono avere un numero di qubit in ingresso pari a:

$$t = n + \left\lceil \log \left( 2 + \frac{1}{2\epsilon} \right) \right\rceil$$



## Quantum Phase Estimation: Sintesi



**Input:** (1) una scatola nera che realizza l'operazione controllata  $U^j$  con  $j$  intero; (2) un autostato  $|u\rangle$  di  $U$  con autovalore  $e^{2\pi i\varphi_u}$ ; (3) un numero  $t = n + \lceil \log(2 + \frac{1}{2\epsilon}) \rceil$  di qubits inizializzati a  $|0\rangle$ .

**Outputs:** An  $n$ -bit approximation  $\tilde{\varphi}_u$  to  $\varphi_u$

**Tempo di esecuzione:**  $O(t^2)$  operazioni e una chiamata all'operatore di controllo  $U^j$ . Probabilità di successo minima pari a  $1 - \epsilon$ .

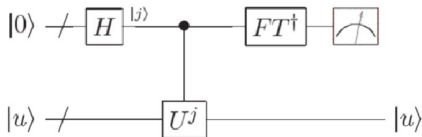


Figure 5.3. Schematic of the overall phase estimation procedure. The top  $t$  qubits (the  $'/'$  denotes a bundle of wires, as usual) are the first register, and the bottom qubits are the second register, numbering as many as required to perform  $U$ .  $|u\rangle$  is an eigenstate of  $U$  with eigenvalue  $e^{2\pi i\varphi}$ . The output of the measurement is an approximation to  $\varphi$  accurate to  $t - \lceil \log(2 + \frac{1}{2\epsilon}) \rceil$  bits, with probability of success at least  $1 - \epsilon$ .



# Quantum Phase Estimation: Sintesi



## Procedimento:

- 1  $|0\rangle|u\rangle$  initial state
- 2  $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^t}} \sum_{j=0}^{2^t-1} |j\rangle|u\rangle$  crea la sovrapposizione degli stati
- 3  $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^t}} \sum_{j=0}^{2^t-1} |j\rangle U^j |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \sum_{j=0}^{2^t-1} e^{2\pi i j \varphi_u} |j\rangle|u\rangle$  applica  $U$
- 4  $\rightarrow |\widetilde{\varphi}_u\rangle|u\rangle$  applica la trasformata inversa di Fourier
- 5  $\rightarrow \widetilde{\varphi}_u$  misura l'uscita del primo registro

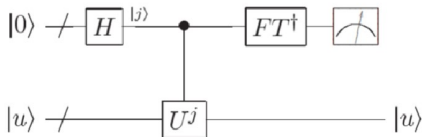


Figure 5.3. Schematic of the overall phase estimation procedure. The top  $t$  qubits (the '/' denotes a bundle of wires, as usual) are the first register, and the bottom qubits are the second register, numbering as many as required to perform  $U$ .  $|u\rangle$  is an eigenstate of  $U$  with eigenvalue  $e^{2\pi i \varphi}$ . The output of the measurement is an approximation to  $\varphi$  accurate to  $t - \lceil \log(2 + \frac{1}{\epsilon}) \rceil$  bits, with probability of success at least  $1 - \epsilon$ .

