



Un altro importante esempio è rappresentato dalle porte o operatori di Pauli X , Y , Z a singolo-qubit.

Gli operatori di Pauli X , Y , Z sono spesso indicati come σ_x , σ_y , e σ_z oppure σ_1 , σ_2 and σ_3 .

Questi operatori sono stati derivati dalle misure dello spin rispettivamente lungo gli assi x , y , and z .

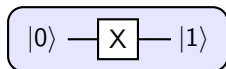
Le porte di Pauli X , Y , Z corrispondono sulla sfera di Bloch alla rotazione di π radianti intorno agli assi x , y , z .



Porta logica X di Pauli



La porta logica X di Pauli scambia le ampiezze di $|0\rangle$ e $|1\rangle$.



$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle \quad (1)$$

$$X = \begin{pmatrix} \langle 0|X|0\rangle & \langle 0|X|1\rangle \\ \langle 1|X|0\rangle & \langle 1|X|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|1\rangle & \langle 0|0\rangle \\ \langle 1|1\rangle & \langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

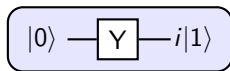
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \quad (3)$$



Porta logica Y di Pauli



La porta logica Y di Pauli scambia le ampiezze di $|0\rangle$ e $|1\rangle$, moltiplica ciascun ampiezza per i e nega l'ampiezza di $|1\rangle$.



$$Y|0\rangle = i|1\rangle, \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle \quad (4)$$

$$Y = \begin{pmatrix} \langle 0|Y|0\rangle & \langle 0|Y|1\rangle \\ \langle 1|Y|0\rangle & \langle 1|Y|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\langle 0|1\rangle & -i\langle 0|0\rangle \\ i\langle 1|1\rangle & -i\langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

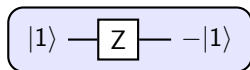
$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| \quad (6)$$



Porta logica Z di Pauli



La porta logica Z di Pauli lascia invariata l'ampiezza di $|0\rangle$ e nega l'ampiezza di $|1\rangle$.



$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle \quad (7)$$

$$Z = \begin{pmatrix} \langle 0|Z|0\rangle & \langle 0|Z|1\rangle \\ \langle 1|Z|0\rangle & \langle 1|Z|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|0\rangle & -\langle 0|1\rangle \\ \langle 1|0\rangle & -\langle 1|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad (9)$$



Porte logiche di Pauli



Le operazioni effettuate dalle porte di Pauli sul generico qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ possono essere riassunte come segue:

$$\begin{aligned} X(a|0\rangle + b|1\rangle) &= a|1\rangle + b|0\rangle \\ Y(a|0\rangle + b|1\rangle) &= i(a|1\rangle - b|0\rangle) \\ Z(a|0\rangle + b|1\rangle) &= a|0\rangle - b|1\rangle \end{aligned} \tag{10}$$

- ▶ l'operatore X esegue il cosiddetto "bit flip"
- ▶ l'operatore Z esegue il cosiddetto "phase flip"
- ▶ l'operatore Y esegue simultaneamente "bit flip" e "phase flip".



Porte o Operatori di Sfasamento



La porta Z di Pauli modifica solo la fase del sistema. La porta Z di Pauli si ottiene come caso particolare di una porta più generale di cambiamento di fase R_θ per $\theta = \pi$. La porta "cambiamento di fase" R_θ si scrive:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + e^{i\theta}|0\rangle\langle 1| \quad (11)$$

Dalla porta R_θ ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ottiene la porta S:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1| \quad (12)$$



Porte o Operatori di Sfasamento T o $\frac{\pi}{8}$



La porta T si ottiene per $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\pi}{4}} |0\rangle\langle 1| \quad (13)$$

il nome $\frac{\pi}{8}$ deriva dal fatto che la porta T può anche essere scritta nella forma

$$T = e^{i\frac{\pi}{8}} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix} \quad (14)$$



Porte o Operatori di Rotazione



Un singolo stato del qubit è un punto sulla superficie della sfera di Bloch. Qualunque trasformazione prodotta da un operatore unitario risulta in una rotazione sulla sfera:

$$U = e^{i\gamma} R_{\hat{n}}(\theta)$$

Questa relazione esprime una generica rotazione rispetto ad una direzione arbitraria \hat{n} ed uno shift della fase γ .

Le porte di rotazione definiscono le rotazioni intorno alle porte di Pauli $P = \{X, Y, Z\}$. Sono definite in base alle relazioni generali

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i \sin(\theta/2)P$$



Porte o Operatori di Rotazione



Sulla base della relazione generale:

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i \sin(\theta/2)P$$

La rotazione intorno all'asse X è data da:

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (16)$$



Porte o Operatori di Rotazione



Sulla base della relazione generale:

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i \sin(\theta/2)P$$

La rotazione intorno all'asse Y è data da:

$$R_Y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (18)$$



Porte o Operatori di Rotazione



Sulla base della relazione generale:

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i \sin(\theta/2)P$$

La rotazione intorno all'asse Z è data da:

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (20)$$



Proprietà delle porte di Pauli



Le proprietà delle porte di Pauli si riassumono come segue:

$$X^2 = I, \quad Y^2 = I, \quad Z^2 = I \quad (21)$$

$$XY = jZ \quad YX = -jZ \quad YZ = jX \quad ZY = -jX \quad (22)$$

$$ZY = -jX \quad ZX = jY \quad XZ = -jY \quad (23)$$



Proprietà delle porte di Pauli



Le proprietà delle porte di Pauli si riassumono anche mediante la tavola di moltiplicazioni:

\times	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	iZ	$-iY$
Y	Y	$-iZ$	I	iX
Z	Z	iY	$-iX$	I

(24)

