

Raccolta di esercizi

Sistemi a radiofrequenza

VERSIONE 2.0

Fiandrino Claudio

7 ottobre 2010



Indice

I	Linee di Trasmissione	3
1	Linee senza perdite	4
1.1	Teoria	4
1.2	Esercizi	7
1.2.1	Esercizio 1	7
1.2.2	Esercizio 2	11
1.2.3	Esercizio 3	12
1.2.4	Esercizio 4	14
2	Linee con perdite	17
2.1	Teoria	17
2.2	Esercizi	19
2.2.1	Esercizio 1	19
2.2.2	Esercizio 2	21
3	Diagramma d'onda stazionaria	26
3.1	Teoria	26
3.2	Esercizi	27
3.2.1	Esercizio 1	27
3.2.2	Esercizio 2	32
3.2.3	Esercizio 3	37
4	Adattatori	41
4.1	Teoria	41
4.1.1	Condizioni di adattamento	41
4.1.2	Tipi di adattatori	42
4.2	Esercizi	43
4.2.1	Esercizio 1	43
4.2.2	Esercizio 2	49
5	Matrice Scattering	56
5.1	Teoria	56
5.2	Esercizi	61
5.2.1	Esercizio 1	61

5.2.2	Esercizio 2	64
6	Esercizi completi	66
6.1	Teoria	66
6.2	Esercizi	67
6.2.1	Esercizio 1	67
II	Linee nel dominio del tempo	73
7	Teoria	74
8	Esercizi	76
8.1	Esercizio 1	76
8.2	Esercizio 2	79
8.3	Esercizio 3	84
8.4	Esercizio 4	86
III	Onde	89
9	Onde piane	90
9.1	Teoria	90
9.2	Esercizi	92
9.2.1	Esercizio 1	92
9.2.2	Esercizio 2	93
9.2.3	Esercizio 3	95
9.2.4	Esercizio 4	98
9.2.5	Esercizio 5	100
10	Guide d'onda	102
10.1	Teoria	102
10.2	Esercizi	103
10.2.1	Esercizio 1	103
10.2.2	Esercizio 2	105
10.2.3	Esercizio 3	105
10.2.4	Esercizio 4	108
IV	Antenne	111
11	Teoria	112

12 Esercizi	114
12.1 Esercizio 1	114
12.2 Esercizio 2	114
12.3 Esercizio 3	115
12.4 Esercizio 4	116
12.5 Esercizio 5	118
12.6 Esercizio 6	121

*Dedicato a Valentina G.
perchè guardando i suoi
dolci occhi non si può
non essere felici!!!*

Prefazione

La raccolta è pensata per capire bene, in ogni tipologia di problemi, quali sono le formule da sapere ed utilizzare e il metodo ottimale di risoluzione. Per questo, accanto ad una parte più pratica, verranno dimostrate le formule essenziali per poter svolgere gli esercizi e si richiamerà l'attenzione sui concetti basilari con limitate spiegazioni teoriche.

Alcuni argomenti verranno trattati durante lo svolgimento dell'esercizio in quanto credo che, determinati concetti siano più facilmente intuibili se osservati nella pratica.

Il testo è realizzato mediante \LaTeX e l'ausilio del pacchetto *engtlc*[‡] contenente la maggior parte dei simboli specifici; per la parte grafica sono stati utilizzati PSTricks e TikZ (i circuiti con il pacchetto *circuitikz*).

Per ulteriori informazioni potete consultare il mio sito:

<http://claudiofiandrino.altervista.org> o contattarmi all'indirizzo mail reperibile dal sito alla sezione *contacts & links*.

[‡] Copyright © 2010 Claudio Fiandrino
url di riferimento: <http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/engtlc/>

Parte I

Linee di Trasmissione

Capitolo 1

Linee senza perdite

1.1 Teoria

Analizziamo brevemente le grandezze fondamentali delle linee:

- . lunghezza d'onda λ ;
- . costante di propagazione k ;
- . velocità di fase V_f ;
- . impedenze e ammettenze caratteristiche Z_∞ e Y_∞ ;
- . coefficienti di riflessione e trasmissione;
- . tensioni e correnti incidenti e riflesse;

Formule essenziali:

$$\lambda = \frac{V_f}{f} \quad (1.1)$$

Nel vuoto la V_f risulta essere pari a alla velocità della luce $c = 3 \cdot 10^8$.

$$k = \omega \cdot \sqrt{LC} \quad (1.2)$$

$\omega = 2\pi f$, L induttanza e C conduttanza.

Trattiamo ora ammettenze ed impedenze caratteristiche:

$$Y_\infty = \frac{k}{\omega L} \quad Z_\infty = \frac{1}{Y_\infty} = \frac{\omega L}{k} \quad (1.3)$$

Dimensionalmente:

$$Y_\infty = \frac{k}{\omega L} = \frac{\omega \cdot \sqrt{LC}}{\omega L} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{LC}{L^2}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{\frac{A \cdot s}{V \cdot m}}{\frac{V \cdot s}{A \cdot m}}} = \sqrt{\frac{A}{V}} = [S]$$

$$Z_\infty = \frac{\omega L}{k} = \frac{\omega L}{\omega \cdot \sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{V \cdot s}{\frac{A \cdot m}{V \cdot m}}} = \sqrt{\frac{V}{A}} = [\Omega]$$

$$V_f = \sqrt{\frac{1}{LC}} = [\text{m/s}] \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = [\text{Hz}]$$

da cui si dimostra:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{V_f} = \frac{2\pi \cdot \frac{\omega}{2\pi}}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad \rightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{\frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad k = \omega \sqrt{LC}$$

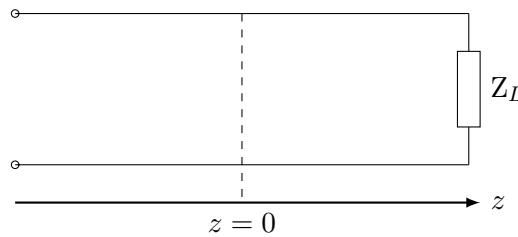
Le analisi dimensionali qui riportate sono molto utili quando verranno trattati in seguito gli esercizi sulle linee con perdite e gli esercizi di polarizzazione. Particolare attenzione occorre prestare al fattore k [rad/s].

Partendo dalle equazioni d'onda:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-jkz} + V_0^- e^{+jkz} \\ I(z) = I_0^+ e^{-jkz} + I_0^- e^{+jkz} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} V_0^+ e I_0^+ \text{ tensioni e correnti progressive o incidenti} & I_0^+ = V_0^+ Y_\infty \\ V_0^- e I_0^- \text{ tensioni e correnti regressive o riflesse} & I_0^- = V_0^- Y_\infty \end{cases} \quad (1.5)$$

Preso un punto qualsiasi della linea in cui poniamo $z = 0$:



$$\begin{cases} V(z=0) = V_0^+ + V_0^- \\ I(z=0) = I_0^+ + I_0^- = Y_\infty V_0^+ + Y_\infty V_0^- \end{cases} \quad (1.6)$$

Il rapporto: $\frac{V(z=0)}{I(z=0)} = Z_0 = Z_L$ è pari all'impedenza di carico per cui

$$V_0^+ + V_0^- = Z_L \cdot Y_\infty V_0^+ + Y_\infty V_0^-$$

Isolando ora le tensioni progressive e regressive si ottiene:

$$V_0^- \cdot (1 + Z_L \cdot Y_\infty) = V_0^+ \cdot (Z_L \cdot Y_\infty - 1)$$

Il rapporto tra tensione regressiva e progressiva:

$$\frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L \cdot Y_\infty - 1}{1 + Z_L \cdot Y_\infty} = \frac{Z_L \cdot \frac{Y_\infty}{Y_\infty} - \frac{1}{Y_\infty}}{\frac{1}{Y_\infty} + Z_L \cdot \frac{Y_\infty}{Y_\infty}} = \frac{Z_L - Z_\infty}{Z_L + Z_\infty} \quad (1.7)$$

Introducendo l'impedenza normalizzata ζ_L come $\frac{Z_L}{Z_\infty}$ si può riscrivere l'equazione precedente come:

$$\frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{\zeta_L - 1}{\zeta_L + 1} \quad (1.8)$$

quantità che prende il nome di **coefficiente di riflessione** in tensione $[\Gamma(z=0)]$.

Analogamente viene introdotta l'ammettenza normalizzata y_L definita come rapporto tra l'ammettenza del carico e l'ammettenza caratteristica della linea $\frac{Y_L}{Y_\infty}$.

Se ci poniamo in un punto qualsiasi della linea scriviamo in modo generale la (1.7):

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{V_0^- e^{jkz}}{V_0^+ e^{-jkz}} = \Gamma(z) e^{2jkz} \quad (1.9)$$

Osserviamo che per conoscere il coefficiente di riflessione in un punto qualsiasi della linea **senza perdite** è necessario soltanto sapere il suo valore in un punto (ad esempio $z = 0$) e cambiarne il valore di fase. Questo principio viene utilizzato per la risoluzione degli esercizi con la Carta di Smith.

Fino ad ora avendo espresso Γ come rapporto di tensioni abbiamo calcolato il valore del coefficiente di riflessione in tensione ${}^V\Gamma$; esiste anche il coefficiente di riflessione in corrente ${}^I\Gamma$, utile solo nella risoluzione di esercizi in cui si devono diagrammare tensioni e correnti della linea.

$${}^V\Gamma = -{}^I\Gamma$$

È possibile partendo dall'equazione della tensione di (1.4) esprimerla solo in termini di tensione progressiva in questo modo:

$$V(z) = V_0^+ e^{-jkz} + V_0^- e^{jkz} = V_0^+(z) + V_0^-(z)$$

raccogliendo il termine $V_0^+(z)$:

$$V(z) = V_0^+(z) \cdot \left[1 + \frac{V_0^-(z)}{V_0^+(z)} \right] = V_0^+(z) \cdot [1 + \Gamma(z)] \quad (1.10)$$

Tale espressione è molto comoda e ricorrerà spesso negli esercizi trattati; il fattore $[1 + \Gamma(z)]$ prende il nome di **coefficiente di trasmissione** e, sostanzialmente, indica come viene trasmessa la tensione progressiva sulla

linea.

Formule passaggio impedenze e Γ :

$$\Gamma_x = \frac{\zeta_x - 1}{\zeta_x + 1} = \frac{Z_x - Z_\infty}{Z_x + Z_\infty} \quad (1.11)$$

$$\zeta_x = \frac{1 + \Gamma_x}{1 - \Gamma_x} \quad (1.12)$$

1.2 Esercizi

Nella parte teorica non è stata analizzata la carta di Smith, strumento essenziale per affrontare gli esercizi. Si è ritenuto meglio procedere con un esempio pratico, quindi dedicare al primo esercizio uno spazio più ampio per permettere appunto di capire bene come utilizzare la CdS.

Si riporterà per alcuni esercizi difficili anche i calcoli effettuati sulla carta come riscontro, tuttavia si consiglia sempre di provare a svolgere passo a passo l'esercizio sulla CdS per verifiche dei valori e per prendere manualità.

1.2.1 Esercizio 1

Testo

Si determini l'ammettenza e l'impedenza di ingresso della linea mostrata in figura (1.1) sapendo che:

$$Y_B = (0.05 + j0.05) \text{ S}, \quad Y_\infty = 0.04 \text{ S}, \quad \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.12 \text{ cm}$$

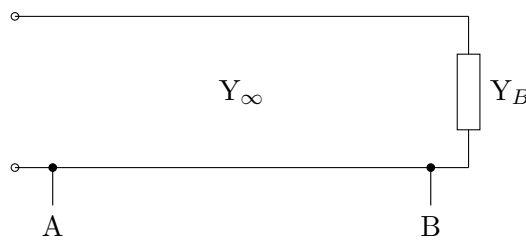


Figura 1.1: linea senza perdite esercizio 1

Risoluzione

La carta di Smith presenta due tipologie di cerchi per rappresentare parte reale ed immaginaria di impedenze ed ammettenze: i cerchi concentrici che

partono da destra, la cui numerazione è visibile sulla retta a metà servono per indicare la parte reale dei carichi; la parte immaginaria viene determinata osservando le iperboli che nascono anch'esse dalla parte destra della CdS e che terminano verso il cerchio più esterno dove si possono leggere i valori. Un carico di qualsiasi tipo viene individuato calcolando prima impedenza o ammettenza caratteristica; dunque nel nostro caso:

$$y_B = \frac{Y_B}{Y_\infty} = \frac{0.05 + j0.05}{0.04} = (1.25 + j1.25) S$$

Andiamo a posizionare sulla carta questo punto: avendo parte immaginaria positiva si troverà nel semicerchio superiore mentre in caso contrario si sarebbe trovato nel semicerchio inferiore.

Un'ottima abitudine è quella di segnare il punto scrivendo vicino che cosa rappresenta; fatto questo tracciamo una retta a partire dal centro della CdS fino al raggio esterno che passi per il punto appena disegnato.

La lettura fornita dal cerchio più esterno (Wavelengths Toward Generator) indica il punto in cui ci troviamo sulla linea ovvero l'ammettenza y_B è a:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_B = 0.181$$

Misuriamo ora con un righello la distanza tra il centro della CdS e y_B : si ottiene 3.2 cm (approssimato).

Questa misura rappresenta il modulo del coefficiente di riflessione nel punto B della linea $|\Gamma_B|$; per determinarne il valore si riporta la lettura di 3.2 cm sulla seconda scala a partire dal basso: la lettura è di 0.5 quindi deduciamo che $|\Gamma_B| = 0.5$.

Ovviamente in generale Γ_B è un numero complesso dotato dunque anche di parte immaginaria: sulla CdS possiamo leggere la fase del coefficiente di riflessione semplicemente guardando sui cerchi esterni in corrispondenza della retta che è stata tracciata. La terza scala a partire dall'esterno riporta infatti i gradi dell'angolo del coefficiente di riflessione (Angle of Reflection Coefficient in degrees).

$$\Gamma_B = 0.5 e^{49^\circ}$$

Si può ricavare molto in fretta il valore dell'impedenza normalizzata partendo dall'ammettenza normalizzata: sulla CdS tracciamo un cerchio sempre partendo dal centro puntando il compasso verso il punto y_B . Il cerchio disegnato è quello per cui $|\Gamma_B|$ è costante: su questo cerchio, all'opposto dell'ammettenza, troviamo l'impedenza normalizzata $\zeta_B = (0.32 - j0.38)$ quindi possiamo ricavare Z_B :

$$Z_B = \zeta_B \cdot Z_\infty \implies Z_B = \zeta_B \cdot \frac{1}{Y_\infty} = (0.32 - j0.38) \cdot \frac{1}{0.04} = (8 - j9.5) \Omega$$

Lo scopo dell'esercizio era calcolare ammettenza e impedenza di ingresso, ovvero il loro valore nel punto A della linea.

Un dato dell'esercizio molto importante è $\frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.12$ cm, cioè la lunghezza equivalente elettrica del tratto di linea \overline{AB} .

Poichè ci troviamo a dover calcolare un parametro conoscendo il carico noto dobbiamo considerare la scala delle lunghezze d'onda verso il generatore che si suppone posto verso l'ingresso del circuito. Esiste anche la scala Wavelengths Toward Load che considereremo solo nei casi in cui, partendo da un'impedenza o ammettenza in ingresso, si vorrà determinare il carico alla fine della linea.

Per la considerazione effettuata alla (1.10) è possibile determinare le ammettenze e impedenze di ingresso solo cambiando fase a quelle note perchè la linea è senza perdite.

Il cambiamento di fase avviene molto semplicemente conoscendo i valori di $\frac{l}{\lambda}$ nei vari punti:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_A = \frac{l}{\lambda} \Big|_B + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.181 + 0.12 = 0.301$$

Alcuni accorgimenti per questi tipi di operazioni: poichè la fase è ciclica anche le $\frac{l}{\lambda}$ lo sono e, in particolare, si ripetono uguali a se stesse ogni 0.5 che rappresenta un giro completo della CdS.

Ad esempio, sappiamo che l'impedenza è opposta all'ammettenza quindi tra esse è presente uno sfasamento corrispondente a 0.25.

Ora procediamo a tracciare una retta partendo dal centro e congiungendo il punto in cui $\frac{l}{\lambda} \Big|_A = 0.301$; l'intersezione fra la retta ed il cerchio tracciato in precedenza rappresenta il valore di $y_A = (1.7 - j1.3)$.

Ricaviamo dunque Y_A :

$$Y_A = y_A \cdot Y_\infty = (1.7 - j1.3) \cdot (0.04) = (0.068 - j0.054) \text{ S}$$

Determiniamo il valore di Z_A semplicemente ricavando prima ζ_A ; conoscendo y_A cerchiamo, sulla CdS, il punto opposto all'ammettenza appartenente al cerchio $|\Gamma_B|$ costante.

Il valore ottenuto è $\zeta_A = (0.32 + j0.29)$.

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_\infty = \zeta_A \cdot \frac{1}{Y_\infty} = (0.32 + j0.29) \cdot \left(\frac{1}{0.04} \right) = (8 + j7) \Omega$$

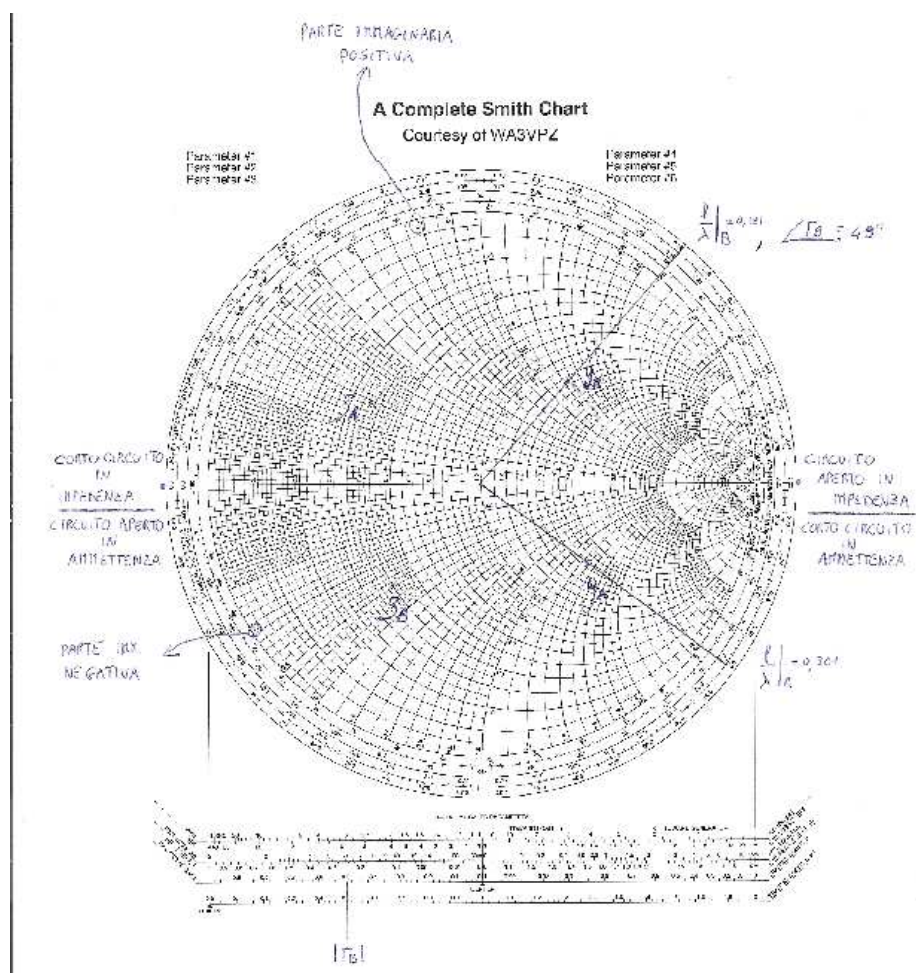


Figura 1.2: CdS esercizio 1

1.2.2 Esercizio 2

Testo

Determinare il valore di Z_L in uscita della linea in figura (1.3) sapendo che:

$$Z_{IN} = (50 - j30) \Omega, \quad Z_{\infty} = 100 \Omega, \quad \overline{AB} = 0.1 \text{ m}, \quad \lambda = 1 \text{ m}$$

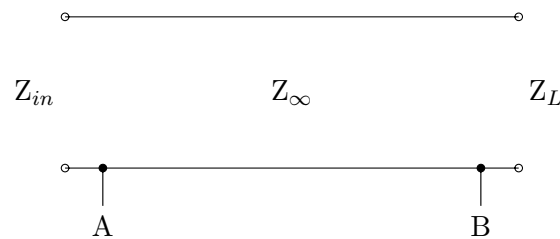


Figura 1.3: linea senza perdite esercizio 2

Risoluzione

Determiniamo immediatamente il valore dell'impedenza normalizzata:

$$\zeta_{IN} = \frac{Z_{IN}}{Z_{\infty}} = \frac{(50 - j30)}{100} = (0.5 - j0.3)$$

Ricaviamo dalla CdS:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_{IN} = 0.058$$

Ruotando di fase sul cerchio a $|\Gamma_{IN}|$ costante utilizzando la scala delle lunghezze d'onda verso il carico (Wavelengths Toward Load) si ha:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_L = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_{IN} + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.058 + \frac{0.1}{1} = 0.158$$

Tracciamo ora sulla CdS una retta tra il centro della carta e le lunghezze d'onda determinate al punto precedente; il punto di intersezione tra la retta ed il cerchio $|\Gamma_{IN}|$ costante risulta essere il valore di ζ_L pari a $(1.05 - j0.8)$.

$$Z_L = \zeta_L \cdot Z_{\infty} = (1.05 - j0.8) \cdot (100) = (105 - j80) \Omega$$

1.2.3 Esercizio 3

Testo

Si determini l'ammettenza iniziale della linea mostrata in figura (1.4) con i seguenti dati:

$$Z_L = (50 + j30) \Omega, \quad Z_{\infty 1} = 25 \Omega, \quad Z_{\infty 2} = 40 \Omega, \\ \overline{AB} = 0.3 \text{ m}, \quad \overline{BC} = 0.4 \text{ m}, \quad \lambda_1 = 1 \text{ m}, \quad \lambda_2 = 1.3 \text{ m}$$

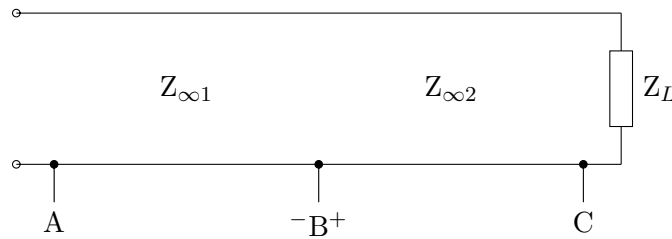


Figura 1.4: linea senza perdite esercizio 3

Risoluzione

In questo esercizio abbiamo una linea che presenta due impedenze caratteristiche: negli esercizi precedenti abbiamo capito calcolare i valori di carichi iniziali e finali che non presentavano discontinuità di questo genere. Si calcolavano le lunghezze d'onda, e intersecando il cerchio a $|\Gamma(z)|$ costante con la retta congiungente il centro e il valore di $\frac{l}{\lambda}$ era possibile determinare il valore del carico incognito.

Ora invece nel punto B della linea occorrerà prestare attenzione in quanto per calcolare l'impedenza o ammettenza normalizzata in B^+ verrà utilizzata l'impedenza caratteristica $Z_{\infty 2}$ mentre in ^-B $Z_{\infty 1}$.

Inoltre, a differenza dei casi precedenti, i due tratti di linea presentano differenti lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 quindi se ne terrà conto quando verranno calcolati i termini $\frac{\overline{AB}}{\lambda}$ e $\frac{\overline{BC}}{\lambda}$ utilizzando di volta in volta il valore opportuno.

Calcoliamo il valore dell'impedenza normalizzata del carico:

$$\zeta_C = \zeta_L = \frac{Z_L}{Z_{\infty 2}} = \frac{(50 + j30)}{40} = (1.25 + j0.75)$$

Riportiamo sulla CdS il punto e determiniamo il valore di ζ_C nel punto B^+ con il solito metodo ovviamente utilizzando la scala Wavelengths Toward

Generator:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = \frac{l}{\lambda} \Big|_C + \frac{\overline{BC}}{\lambda_2} = 0.176 + \frac{0.4}{1.3} = 0.484$$

A questo punto l'intersezione fra cerchio $|\Gamma_C|$ costante e la retta passante per il centro della CdS e il punto in corrispondenza di $\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = 0.484$ determina il valore dell'impedenza normalizzata:

$$\zeta_{B^+} = (0.58 - j0.08)$$

Ricaviamo il valore di Z_B :

$$Z_B = \zeta_{B^+} \cdot Z_{\infty 2} = (0.58 - j0.08) \cdot 40 = (23.2 - j3.2) \Omega$$

Il valore di impedenza in un punto della linea non cambia anche se sono presenti discontinuità quindi nel punto $-B$ possiamo calcolare l'impedenza normalizzata come:

$$\zeta_{(-B)} = \frac{Z_B}{Z_{\infty 1}} = \frac{(23.2 - j3.2)}{25} = (0.928 - j0.128)$$

Ora con il solito metodo calcoliamo:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_A = \frac{l}{\lambda} \Big|_{-B} + \frac{\overline{AB}}{\lambda_1} = 0.448 + \frac{0.3}{1} = 0.748 = 0.248$$

È stato utilizzato il valore di lunghezza d'onda λ_1 ed al risultato totale, poichè per la periodicità un giro sulla CdS corrisponde a 0.5, è stato tolto un periodo.

Determiniamo ora:

$$\zeta_A = 1.2$$

da cui:

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_{\infty 1} = 1.2 \cdot 25 = 32 \Omega$$

Per calcolare il valore dell'ammettenza come richiesto dall'esercizio ho preferito effettuare tutte le operazioni in impedenza e ricavare ora il valore semplicemente:

$$y_A = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{32} = 0.03 \text{ S}$$

Credo questo metodo sia il più veloce, ma esistono molti altri metodi di soluzione: ad esempio sarebbe stato possibile calcolare inizialmente il valore di ammettenza del carico e proseguire tutto l'esercizio ragionando con le ammettenze anzichè le impedenze; un'altra possibile metodologia di risoluzione era quella di svolgere l'esercizio in impedenza e una volta tracciato il cerchio $|\Gamma_{(-B)}|$ costante ricavare il valore dell'ammettenza normalizzata conoscendo ζ_A ; nota y_A si calcolava Y_A .

1.2.4 Esercizio 4

Testo

Si determini il valore dell'impedenza iniziale Z_A della linea mostrata in figura (1.5) sapendo che:

$$\begin{aligned} Z_L &= (75 + j75) \Omega, & Z_{\infty 1} &= 50 \Omega, & Z_{\infty 2} &= 75 \Omega, \\ \overline{AB} &= 7.5 \text{ cm}, & \overline{BC} &= 15 \text{ cm}, & \overline{BD} &= 10 \text{ cm}, \\ V_f &= c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, & f &= 1 \text{ GHz} \end{aligned}$$

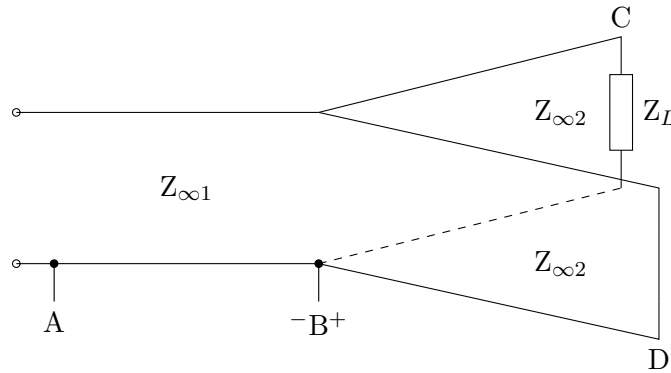


Figura 1.5: linea senza perdite esercizio 4

Risoluzione

In questo esercizio non conosciamo il valore della lunghezza d'onda della linea a differenza di quelli precedenti e nel punto B è presente una discontinuità di impedenza caratteristica oltre alla biforcazione della linea. I due carichi (Z_L e il cortocircuito) sono in *parallelo* quindi conviene utilizzare le ammettenze in quanto algebricamente sono più facilmente trattabili.

Calcoliamo inanzi tutto il valore di λ ; conoscendo la velocità di fase e la frequenza di lavoro:

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^9} = 0.3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

Analizziamo ora separatamente i due rami; partiamo dal segmento \overline{BD} che termina con il corto circuito.

Sulla CdS il cortocircuito in impedenza è rappresentato sul punto a sinistra del cerchio esterno, girando sulla carta determiniamo le lunghezze d'onda

toward generator nel punto B^+ e successivamente ricaviamo l'ammettenza normalizzata.

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = \frac{l}{\lambda} \Big|_D + \frac{\overline{BD}}{\lambda} = 0 + \frac{10}{30} = 0.333$$

Posizionato il punto sulla CdS con il righello si traccia una retta che passi per il centro. In prossimità di $\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = 0.333$ avremo il valore di $\zeta_{B^+D} = -j1.8$ mentre sul punto opposto con $\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = 0.083$ avremo $y_{B^+D} = j0.57$.

Questo è il metodo più rigoroso per calcolare l'ammettenza normalizzata in B^+ del segmento \overline{BD} .

In modo più rapido si poteva calcolare il valore di $\frac{\overline{BD}}{\lambda} = 0.333$, partire dal cortocircuito in ammettenza (vedi CdS in figura 1.2) le cui lunghezze equivalenti sono 0.25. Muovendosi sulla CdS sempre toward generator:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = 0.25 + 0.333 = 0.583 = 0.083$$

ecco determinato il punto in cui andare a leggere il valore di y_{B^+} .

Per quanto riguarda il ramo \overline{BC} si tratta effettuare il procedimento standard:

$$\zeta_L = \zeta_C = \frac{Z_C}{Z_{\infty 2}} = \frac{(75 + j75)}{75} = (1 + j)$$

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = \frac{l}{\lambda} \Big|_C + \frac{\overline{BC}}{\lambda} = 0.162 + \frac{15}{30} = 0.662 = 0.162$$

Disegnando il cerchio con il compasso con raggio $|\Gamma_C|$ si ricava il valore di $y_{B^+C} = (0.5 - j0.5)$.

Calcoliamo ora il valore dell'impedenza normalizzata totale in B^+ :

$$y_{B^+} = y_{B^+C} + y_{B^+D} = (0.5 - j0.5) + (j0.57) = (0.5 + j0.07)$$

da cui si ottiene tracciando il cerchio $|\Gamma_{B^+}|$:

$$\zeta_{B^+} = (2.1 - j0.22)$$

A questo punto possiamo ricavare, tenendo presente della discontinuità, il valore di Z_B e successivamente $\zeta_{(-B)}$:

$$Z_B = \zeta_{B^+} \cdot Z_{\infty 2} = (2.1 - j0.22) \cdot 75 = (157.5 - j16.5) \Omega$$

$$\zeta_{(-B)} = \frac{Z_B}{Z_{\infty 1}} = \frac{(157.5 - j16.5)}{50} = (3.15 - j0.33)$$

Ora si effettua il solito procedimento:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_A = \frac{l}{\lambda} \Big|_{(-B)} + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.264 + \frac{7.5}{30} = 0.264 + 0.25 = 0.514 = 0.014$$

determinando così un valore di impedenza normalizzata nel punto A:

$$\zeta_A = (0.32 + j0.02)$$

da cui:

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_{\infty 1} = (0.32 + j0.02) \cdot 50 = (16 + j) \Omega$$

Capitolo 2

Linee con perdite

2.1 Teoria

Si è analizzato come le tensioni e le correnti variano su una linea di trasmissione senza perdite introducendo le equazioni d'onda (1.4). Tali equazioni sono valide in generale quindi valgono anche per le linee con perdite.

Il fattore discriminante tra una linea con perdite e una senza è il fattore k presente negli esponenti della 1.4:

$$\begin{cases} k = \beta & (k \in \mathbb{R}) \text{ per le linee senza perdite} \\ k = \beta - j\alpha & (k \in \mathbb{C}) \text{ per le linee con perdite} \end{cases}$$

A questo punto possiamo riscrivere le equazioni d'onda:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-j(\beta-j\alpha)z} + V_0^- e^{j(\beta-j\alpha)z} \\ I(z) = I_0^+ e^{-j(\beta-j\alpha)z} + I_0^- e^{j(\beta-j\alpha)z} \end{cases} \quad (2.1)$$

La tensione progressiva diventa:

$$V^+(z) = V_0^+ e^{-j(\beta-j\alpha)z} = V_0^+ e^{-j\beta z} e^{-\alpha z}$$

Per cui quando negli esercizi si deve calcolare il Γ in un punto partendo da un altro non si può più effettuare solo un cambiamento di fase come visto nella 1.9, ma:

$$\Gamma_A = \Gamma_B e^{-2j\beta z} e^{-2\alpha z} = \Gamma_B e^{-j2\beta \overline{AB}} e^{-2\alpha \overline{AB}} \quad (2.2)$$

dove il termine $e^{-\alpha \overline{AB}}$ rappresenta le attenuazioni sulla linea che di solito indicheremo con il termine A_n .

Dimensionalmente le unità di misura di un argomento di un fattore esponenziale sono:

neper argomento $\in \mathbb{R}$
radianti argomento $\in \mathbb{C}$

Quindi poichè $e^{-2\alpha z}$ sono neper ne consegue che $\alpha = [\text{Np}/\text{m}]$.

Normalmente l'attenuazione si misura in dB quindi negli esercizi il coefficiente α fornito deve essere trasformato in neper:

$$\alpha|_{\text{dB}} = \alpha 20 \log_{10} e \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\alpha|_{\text{dB}}}{20 \log_{10} e} = \frac{\alpha|_{\text{dB}}}{8.686}$$

Trattiamo ora la potenza sulle linee; in generale valgono le regole di elettrotecnica per cui:

$$\begin{cases} P(z) = \mathbf{Re}\{V \cdot I^*\} & V \text{ e } I \text{ fasori, valore efficace} \\ P(z) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Re}\{V \cdot I^*\} & V \text{ e } I \text{ fasori, valore di picco} \end{cases} \quad (2.3)$$

Soluzioni analoghe sono:

$$\begin{cases} P(z) = \mathbf{Re}\{Z\} \cdot |I|^2 \\ P(z) = \mathbf{Re}\{Y\} \cdot |V|^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Sviluppando la 2.3 con valori efficaci si dimostra che:

$$P(z) = \mathbf{Re}\{Y_\infty\} \cdot |V^+(z)|^2 \cdot [1 - |\Gamma(z)|^2] \quad (2.5)$$

dove il termine $\mathbf{Re}\{Y_\infty\} \cdot |V^+(z)|^2$ prende il nome di $P^+(z)$ potenza progressiva.

Il calcolo del rapporto di potenza tra due punti della linea A e B utilizzando la 2.5 porta a questa conclusione:

$$P_B = P_A \cdot A_n \cdot A_d \quad (2.6)$$

- . A_n sappiamo essere il fattore di attenuazione della linea;
- . A_d rappresenta il fattore di disadattamento della linea di cui ci occuperemo bene più avanti e vale $\frac{1-|\Gamma_B|^2}{1-|\Gamma_A|^2}$.

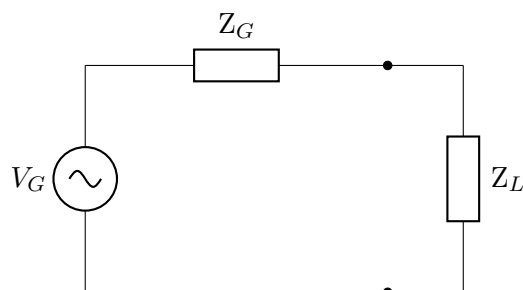
Esiste un secondo metodo per il calcolo della potenza rispetto alle uguaglianze della 2.4, in cui occorre introdurre una nuova grandezza: il gamma di Kurokawa (${}^K\Gamma$).

Definizione:

$${}^K\Gamma = \frac{Z_L - Z_G^*}{Z_L + Z_G} \quad (2.7)$$

La potenza dissipata dal carico L risulta essere:

$$P_L = P_{\text{disp}} \cdot [1 - |{}^K\Gamma|^2] \quad \text{dove } P_{\text{disp}} = \frac{|V_G|^2}{4 \cdot \mathbf{Re}\{Z_G\}}$$

Figura 2.1: circuito per calcolo del $K\Gamma$

2.2 Esercizi

2.2.1 Esercizio 1

Testo

Si calcoli la potenza dissipata dal carico Z_L della linea mostrata in figura 2.2 sapendo che:

$$\begin{aligned} Z_L &= (200 - j150) \Omega, & Z_G &= 75 \Omega, & Z_\infty &= 75 \Omega, \\ \overline{AB} &= 30 \text{ m}, & \lambda &= 2.96 \text{ m}, & \alpha|_{\text{dB}} &= 0.1 \text{ dB/m}, \\ V_G &= 100 \text{ V}_{\text{eff}} \end{aligned}$$

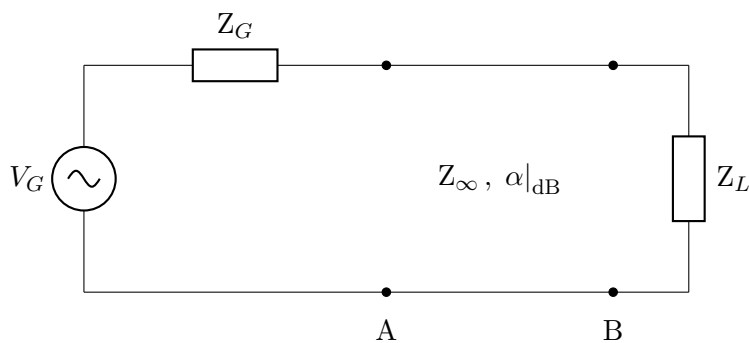


Figura 2.2: linee con perdite esercizio 1

Risoluzione

Il metodo per risolvere questo esercizio è cercare di riportare il carico nel punto iniziale in modo da avere un circuito simile a quello in figura 2.1, calcolare la potenza dissipata nel punto A e attraverso la 2.6 determinare la

potenza dissipata su B, ossia da Z_L .

Calcoliamo l'impedenza normalizzata e il valore di $|\Gamma_B|$:

$$\zeta_L = \zeta_B = \frac{Z_L}{Z_\infty} = \frac{(200 - j150)}{75} = (2.6 - j2)$$

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_B = 0.279 \quad \implies \quad |\Gamma_B| = 0.62$$

La linea presenta attenuazioni quindi dobbiamo calcolare il fattore An lineare: i dati del problema ci dicono che $\alpha_{\text{dB}} = 0.1 \text{ dB/m}$ e la linea misura 30 m.

$$\text{An}_{\text{dB}} = \alpha_{\text{dB}} \cdot \overline{AB} = 0.1 \cdot 30 = 3 \text{ dB attenuazione totale del tratto } \overline{AB}$$

Data l'attenuazione totale An_{dB} si può calcolare l'attenuazione An lineare:

$$\text{An} = 10^{-\frac{\text{An}_{\text{dB}}}{10}} = 10^{-\frac{3}{10}} = 0.5 \text{ Np}$$

Conoscendo questo parametro possiamo stimare di quanto si riduce il $|\Gamma_A|$ rispetto a $|\Gamma_B|$:

$$|\Gamma_A| = |\Gamma_B| \cdot \text{An} = 0.62 \cdot 0.5 = 0.31$$

Determiniamo ora le lunghezze d'onda nel punto A con il solito procedimento:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_A = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_B + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.279 + \frac{30}{2.96} = 0.279 + 10.135 = 10.414 = 0.414$$

10 corrisponderebbero a 20 giri sulla CdS dunque si eliminano.

A questo punto sapendo le $\left. \frac{l}{\lambda} \right|_A$ e $|\Gamma_A|$ possiamo tracciare il cerchio a $|\Gamma_A|$; l'intersezione del cerchio con la retta congiungente il centro della CdS e $\left. \frac{l}{\lambda} \right|_A$ permette di identificare il punto corrispondente a ζ_A :

$$\zeta_A = (0.65 - j0.39)$$

da cui si ricava:

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_\infty = (0.65 - j0.39) \cdot 75 = (48.75 - j29.25) \Omega$$

Per il calcolo della potenza abbiamo due metodi alternativi:

- . utilizzare le equazioni 2.4
- . utilizzare il $|\Gamma|$

Per quanto riguarda il primo metodo, utilizzando la 1° delle due equazioni occorre calcolare con le formule dell'elettrotecnica la corrente I_A che sarà:

$$I_A = \frac{|V_G|}{|Z_G + Z_A|}$$

oppure con la 2° ricavare prima V_A :

$$V_A = \frac{|Z_A|}{|Z_G + Z_A|} \cdot |V_G|$$

e successivamente Y_A dalla CdS poichè Z_A è nota.

Personalmente ritengo entrambi i metodi più lunghi rispetto all'utilizzo del $|\Gamma^K|$.

Poichè quasi sempre le impedenze interne dei generatori $Z_G \in \mathbb{R}$ la formula 2.7 non comporta neppure lo sforzo di dover calcolare il complesso coniugato; siccome per la potenza serve il $|\Gamma^K|^2$ determino:

$$\begin{aligned} |\Gamma^K| &= \frac{|Z_A - Z_G^*|}{|Z_A + Z_G|} = \frac{|(48.75 - j29.25) - 75|}{|(48.75 - j29.25) + 75|} = \frac{|-26.25 - j29.25|}{|123.75 - j29.25|} = \\ &= \frac{39.3}{127.16} = 0.31 \end{aligned}$$

Calcolando ora il termine P_{disp} :

$$P_{\text{disp}} = \frac{|V_G|^2}{4 \cdot \text{Re}\{Z_G\}} = \frac{100^2}{4 \cdot 75} = 33.3 \text{ W}$$

possiamo determinare la potenza dissipata nel punto A:

$$P_A = P_{\text{disp}} \cdot [1 - |\Gamma^K|^2] = 33.3 \cdot [1 - |0.31|^2] = 33.3 \cdot 0.9093 = 30.1 \text{ W}$$

Ora, per la 2.6 possiamo finalmente calcolare la potenza dissipata nel punto B e quindi dal carico Z_L :

$$P_B = P_A \cdot A_n \cdot A_d = P_A \cdot A_n \cdot \frac{[1 - |\Gamma_B|^2]}{[1 - |\Gamma_A|^2]}$$

e sostituendo numericamente:

$$P_B = 30.1 \cdot 0.5 \cdot \frac{[1 - |0.62|^2]}{[1 - |0.31|^2]} = 30.1 \cdot 0.5 \cdot \frac{0.6156}{0.9093} = 10.19 \text{ W}$$

2.2.2 Esercizio 2

Testo

Si calcoli la potenza dissipata dai due carichi Z_{L1} e Z_{L2} per la linea di trasmissione in figura 2.3 sapendo che:

$$\begin{array}{lll} Z_{L1} = (100 + j100) \Omega, & Z_{L2} = (200 + j200) \Omega, & Z_G = 300 \Omega, \\ Z_{\infty} = 75 \Omega, & Z_{\infty 1} = 100 \Omega, & Z_{\infty 2} = 200 \Omega, \\ \overline{AB} = 10 \text{ m}, & \overline{BC} = 30 \text{ cm}, & \overline{BD} = 50 \text{ cm}, \\ \lambda = 25 \text{ cm}, & \alpha|_{\text{dB}} = 0.2 \text{ dB/m}, & V_G = 20 \text{ V}_{\text{eff}} \end{array}$$

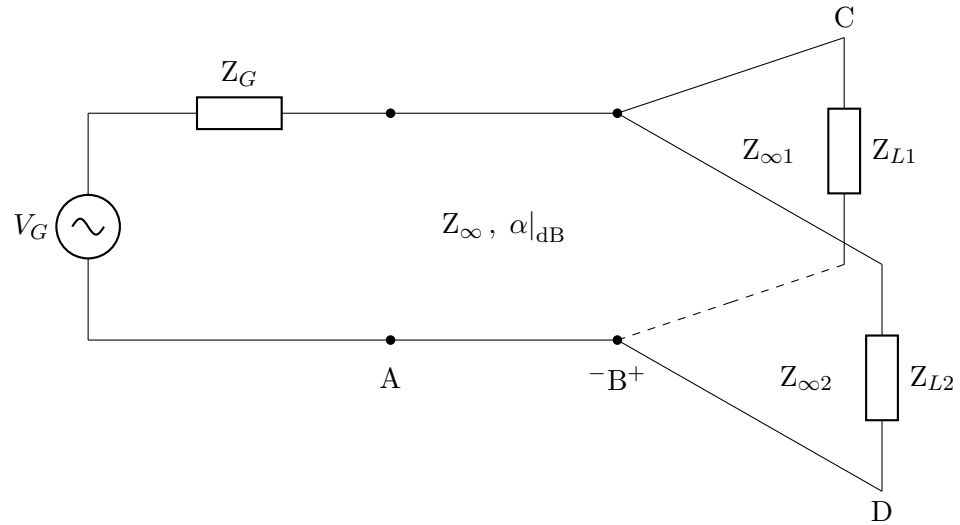


Figura 2.3: linee con perdite esercizio 2

Risoluzione

Questo esercizio consente di capire molto bene come avviene la propagazione della potenza su una linea. Inanzi tutto si procederà a determinare l'impedenza nel punto A per ottenere un circuito simile a quello in figura 2.1; questo permetterà di calcolare il $|\Gamma^K|$ ed ottenere quindi la potenza dissipata in A.

In seguito si determinerà la potenza nel punto B e quella dissipata dai due carichi introducendo ed analizzando i concetti di potenza incidente e riflessa.

Partendo dal punto C calcoliamo:

$$\zeta_{L1} = \zeta_C = \frac{Z_{L1}}{Z_{\infty 1}} = \frac{(100 + j100)}{100} = (1 + j)$$

Dalla CdS determino l'ammettenza normalizzata:

$$y_C = (0.5 - j0.5)$$

Ragionando con le ammettenze avremo meno difficoltà nel punto di giunzione B; le lunghezze d'onda (in ammettenza) sono pari a:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_C = 0.412$$

Quindi possiamo determinare l'ammettenza del punto B^+ del tratto \overline{BC} ; al solito:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_{B^+} = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_C + \frac{\overline{BC}}{\lambda} = 0.412 + \frac{30}{25} = 0.412 + 1.2 = 1.612 = 0.112$$

$$y_{B^+}^{\overline{BC}} = (0.6 + j0.65)$$

da cui si ricava:

$$Y_{B^+}^{\overline{BC}} = y_{B^+}^{\overline{BC}} \cdot Y_{\infty 1} = (0.6 + j0.65) \cdot \frac{1}{100} = (6 + j6.5) \text{ mS}$$

Con lo stesso ragionamento calcoliamo il valore dell'ammettenza in B^+ per il tratto \overline{BD} :

$$\zeta_{L2} = \zeta_D = \frac{Z_{L2}}{Z_{\infty 2}} = \frac{(200 + j200)}{200} = (1 + j)$$

Mediante la CdS ricaviamo l'ammettenza normalizzata:

$$y_D = (0.5 - j0.5)$$

Le lunghezze d'onda, sempre in ammettenza, sono:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_D = 0.412$$

Ora calcoliamo:

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_{B^+} = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_D + \frac{\overline{BD}}{\lambda} = 0.412 + \frac{50}{25} = 0.412 + 2 = 2.412$$

Per cui:

$$y_{B^+}^{\overline{BD}} = (0.5 - j0.5)$$

$$Y_{B^+}^{\overline{BD}} = y_{B^+}^{\overline{BD}} \cdot Y_{\infty 2} = (0.5 - j0.5) \cdot \frac{1}{200} = (2.5 - j2.5) \text{ mS}$$

A questo punto possiamo calcolare l'ammettenza complessiva in B^+ data da:

$$Y_{B^+} = Y_{B^+}^{\overline{BC}} + Y_{B^+}^{\overline{BD}} = (6 + j6.5) + (2.5 - j2.5) = (8.5 + j4) \text{ mS}$$

Ricaviamo ora l'ammettenza normalizzata in ^-B tenendo presente la discontinuità delle impedenze caratteristiche:

$$y_{(-B)} = Y_{B^+} \cdot Z_{\infty} = (0.0085 + j0.004) \cdot (75) = (0.64 + j0.3)$$

Sulla CdS tracciamo il punto e disegniamo il cerchio per calcolare $|\Gamma_{(-B)}|$; calcoliamo la lunghezza del segmento che parte dal centro della CdS e congiunge il punto $y_{(-B)}$; andiamo a misurare sulla scala del coefficiente di riflessione e la misura ottenuta è $|\Gamma_{(-B)}| = 0.27$.

Il tratto di linea \overline{AB} presenta attenuazioni:

$$\text{An}|_{\text{dB}} = \alpha|_{\text{dB}} \cdot \overline{AB} = 0.2 \cdot 10 = 2 \text{ dB attenuazione totale del tratto } \overline{AB}$$

Data l'attenuazione totale An_{dB} invertendo si calcola l'attenuazione An lineare:

$$An = 10^{-\frac{An_{dB}}{10}} = 10^{-\frac{2}{10}} = 0.63 \text{ Np}$$

Conoscendo questo parametro possiamo stimare di quanto si riduce il $|\Gamma_A|$ rispetto a $|\Gamma_{(-B)}|$:

$$|\Gamma_A| = |\Gamma_{(-B)}| \cdot An = 0.27 \cdot 0.63 = 0.17$$

Partendo da $-B$ determiniamo le lunghezze d'onda in A ; l'intersezione tra la retta passante per il centro della CdS e $\frac{l}{\lambda} \Big|_A$ con il cerchio a $|\Gamma_A|$ costante sarà y_A .

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_A = \frac{l}{\lambda} \Big|_{(-B)} + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.085 + \frac{1000}{25} = 0.085 + 40 = 0.085$$

In questo modo si determina:

$$y_A = (0.77 + j0.28)$$

Da cui si può ricavare dalla CdS:

$$\zeta_A = (1.19 - j0.39)$$

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_\infty = (1.19 - j0.39) \cdot (75) = (89.25 - j29.25) \Omega$$

In questo esercizio facciamo vedere l'equivalenza dell'utilizzo delle 2.4 o di 2.7 per il calcolo P_A :

$$P_A = \mathbf{Re}\{Z_A\} \cdot |I_A|^2 = \mathbf{Re}\{Z_A\} \cdot \frac{|V_G|}{|Z_G + Z_A|}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned} P_A &= 89.25 \cdot \left[\frac{|20|}{|300 + (89.25 - j29.25)|} \right]^2 = 89.25 \cdot \left[\frac{20}{390.35} \right]^2 = \\ &= 89.25 \cdot (0.051)^2 = 89.25 \cdot 0.0026 = 0.232 \text{ W} = 232 \text{ mW} \end{aligned}$$

Calcolo del $|\Gamma^K|$:

$$\begin{aligned} |\Gamma^K| &= \frac{|Z_A - Z_G^*|}{|Z_A + Z_G|} = \frac{|(89.25 - j29.25) - 300|}{|(89.25 - j29.25) + 300|} = \frac{|-210.75 - j29.25|}{|389.25 - j29.25|} = \\ &= \frac{212.77}{390.35} = 0.55 \end{aligned}$$

Calcolando ora il termine P_{disp} :

$$P_{\text{disp}} = \frac{|V_G|^2}{4 \cdot \mathbf{Re}\{Z_G\}} = \frac{20^2}{4 \cdot 300} = 0.333 \text{ W} = 333 \text{ mW}$$

possiamo determinare la potenza dissipata nel punto A :

$$P_A = P_{\text{disp}} \cdot [1 - |\Gamma|^2] = 0.333 \cdot [1 - |0.55|^2] = 50 \cdot 0.6975 = 0.232 \text{ W} = 232 \text{ mW}$$

Per la 2.6 la potenza nel punto $-B$ risulta essere:

$$P_{(-B)} = P_A \cdot \text{An} \cdot \frac{[1 - |\Gamma_{(-B)}|^2]}{[1 - |\Gamma_A|^2]}$$

sostituendo i valori:

$$P_{(-B)} = 0.232 \cdot 0.63 \cdot \frac{[1 - |0.27|^2]}{[1 - |0.17|^2]} = 0.232 \cdot 0.63 \cdot \frac{0.9271}{0.9711} = 0.140 \text{ W} = 140 \text{ mW}$$

Vediamo ora come la potenza si distribuisce sui due carichi. Sappiamo che:

$$P_{B^+} = P_{B^+}^{\overline{BC}} + P_{B^+}^{\overline{BD}}$$

e che:

$$P_{(-B)} = P_{B^+}$$

perchè nel punto B la potenza non si dissipa quindi rimane uguale in $-B$ e in B^+ . Utilizzando la seconda equazione di 2.4 possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} P_{B^+} &= \mathbf{Re}\{Y_{B^+}\} \cdot |V_{B^+}|^2 \\ P_{B^+}^{\overline{BC}} &= \mathbf{Re}\{Y_{B^+}^{\overline{BC}}\} \cdot |V_{B^+}|^2 \\ P_{B^+}^{\overline{BD}} &= \mathbf{Re}\{Y_{B^+}^{\overline{BD}}\} \cdot |V_{B^+}|^2 \end{aligned}$$

Ricavando $|V_{B^+}|^2$ dalla prima possiamo calcolare $P_{B^+}^{\overline{BC}}$ e $P_{B^+}^{\overline{BD}}$:

$$|V_{B^+}|^2 = \frac{P_{B^+}}{\mathbf{Re}\{Y_{B^+}\}}$$

quindi:

$$\begin{aligned} P_{B^+}^{\overline{BC}} &= \frac{P_{B^+} \cdot \mathbf{Re}\{Y_{B^+}^{\overline{BC}}\}}{\mathbf{Re}\{Y_{B^+}\}} \\ P_{B^+}^{\overline{BD}} &= \frac{P_{B^+} \cdot \mathbf{Re}\{Y_{B^+}^{\overline{BD}}\}}{\mathbf{Re}\{Y_{B^+}\}} \end{aligned}$$

A questo punto possiamo sostituire i dati:

$$\begin{aligned} P_{B^+}^{\overline{BC}} &= \frac{0.140 \cdot 0.006}{0.0085} = 0.099 \text{ W} = 99 \text{ mW} \\ P_{B^+}^{\overline{BD}} &= \frac{0.140 \cdot 0.0025}{0.0085} = 0.041 \text{ W} = 41 \text{ mW} \end{aligned}$$

I risultati sono corretti in quanto:

$$99 \text{ mW} + 41 \text{ mW} = 140 \text{ mW} \text{ che rappresenta } (P_{B^+} = P_{(-B)})$$

Capitolo 3

Diagramma d'onda stazionaria

3.1 Teoria

Il diagramma d'onda stazionaria rappresenta il grafico di tensioni o correnti sulla linea di trasmissione.

Ci occuperemo solo di determinare i moduli e non la fase in quanto il procedimento è molto più complesso e non viene richiesto nei temi d'esame.

Le uniche conoscenze teoriche nuove richieste per queste tipologie di esercizi sono le seguenti:

- . massimi e minimi di $|V(z)|$,
- . ROS.

I massimi e i minimi si trovano sull'asse \mathbb{R} della CdS ovvero sulla linea centrale.

Il ROS o anche SWR viene definito come rapporto d'onda stazionaria:

$$S = \frac{|V(z)|_{max}}{|V(z)|_{min}} = \frac{|I(z)|_{max}}{|I(z)|_{min}} \quad (3.1)$$

Per le misurazioni la formula da ricordare è:

$$S = \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|} \quad (3.2)$$

Se i carichi sono *adattati*, concetto che riprenderemo meglio nel capitolo sugli adattatori, $|\Gamma(z)| = 0$ e il ROS ha valore massimo pari a 1. Ciò significa che tensioni o correnti sono uniformate sulla linea perchè l'impedenza di carico è pari all'impedenza caratteristica.

Vediamo negli esercizi i passi fondamentali per realizzare il diagramma d'onda stazionaria.

3.2 Esercizi

3.2.1 Esercizio 1

Testo

Si tracci il diagramma d'onda stazionaria di $\frac{|V(z)|}{|V_G|}$ per la linea di trasmissione in figura 3.1 sapendo che:

$$\begin{aligned} Z_L &= (100 - j100) \Omega, & Z_G &= 50 \Omega, & Z_\infty &= 50 \Omega, \\ \overline{AB} &= 3.9 \text{ cm}, & V_f &= c/2 \text{ m/s}, & f &= 5 \text{ GHz}, \\ V_G &= 100 \text{ V}_{\text{eff}} \end{aligned}$$

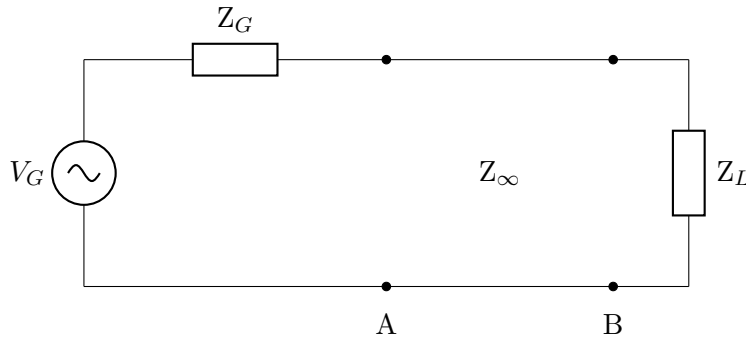


Figura 3.1: diagramma d'onda stazionaria esercizio 1

Risoluzione

. Diagramma in tensione

Per prima cosa si determina il valore dell'impedenza in A con i soliti passaggi:

$$\zeta_L = \zeta_B = \frac{Z_L}{Z_\infty} = \frac{(100 - j100)}{50} = (2 - j2)$$

La linea è senza perdite, calcoliamo prima il parametro λ e ricaviamo $\frac{l}{\lambda}|_A$:

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{c}{2 \cdot f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot (5 \cdot 10^9)} = 0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_A = \frac{l}{\lambda} \Big|_B + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.209 + \frac{3.9}{3} = 0.209 + 1.3 = 1.509 = 0.009$$

Da cui si ottiene:

$$\zeta_A = (0.24 + j0.05)$$

e quindi:

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_\infty = (0.24 + j0.05) \cdot 50 = (12 + j2.5) \Omega$$

Occorre prestare particolare attenzione al termine $\frac{AB}{\lambda} = 1.3$: ci indica che il diagramma partirà dal punto A e dopo 1.3 raggiungerà B. Il valore 1.3 può essere scomposto come $0.5 + 0.5 + 0.25 + \dots$ quindi sulla CdS B sarà in corrispondenza di due rotazioni e mezzo + il termine aggiuntivo 0.05 da A. Abbiamo ottenuto ora un circuito di questo genere:

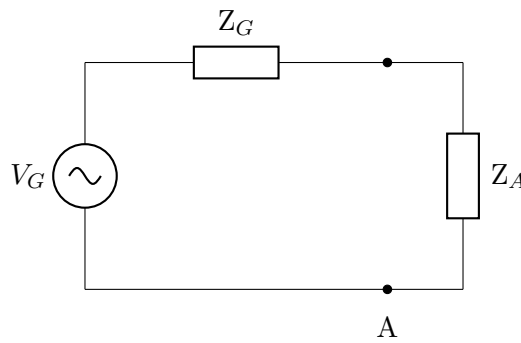


Figura 3.2: circuito nel punto A

Calcoliamo con le regole di elettrotecnica il valore della tensione sul carico Z_A :

$$V_A = \frac{Z_A}{Z_A + Z_G} \cdot V_G = \frac{\zeta_A}{\zeta_A + \frac{Z_G}{Z_\infty}} \cdot V_G$$

Ma per il diagramma servono i moduli quindi:

$$|V_A| = \frac{|\zeta_A|}{\left| \zeta_A + \frac{Z_G}{Z_\infty} \right|} \cdot |V_G|$$

sostituendo i dati numerici:

$$|V_A| = \frac{|(0.24 + j0.05)|}{|(0.24 + j0.05) + 1|} \cdot |V_G| = \frac{0.245}{1.241} \cdot |V_G| = 0.197 \cdot |V_G|$$

Abbiamo ricavato dunque il valore di partenza dell'asse y del diagramma:

$$\frac{|V_A|}{|V_G|} = 0.197$$

Determiniamo ora il valore della tensione nel punto B; per la 1.10 sappiamo che:

$$V(z) = V_0^+(z) \cdot [1 + \Gamma(z)]$$

dove la tensione $V_0^+(z)$ rappresenta la tensione progressiva che non cambia sulla linea. Nel punto A scriviamo:

$$V_A = V_A^+ \cdot [1 + \Gamma_A]$$

mentre per B:

$$V_B = V_B^+ \cdot [1 + \Gamma_B]$$

Ma $V_A^+ = V_B^+$ quindi in B:

$$V_B = V_A^+ \cdot [1 + \Gamma_B]$$

Noi conosciamo il valore di $|V_A|$ perciò se riscriviamo le equazioni precedenti in modulo ci accorgiamo che l'unico parametro incognito è $|V_A^+|$ determinabile come:

$$|V_A^+| = \frac{|V_A|}{|1 + \Gamma_A|}$$

A questo punto sostituendo:

$$|V_B| = |V_A^+| \cdot |1 + \Gamma_B| = \frac{|V_A|}{|1 + \Gamma_A|} \cdot |1 + \Gamma_B|$$

I termini del tipo $|1 + \Gamma(z)|$ sono stati definiti come coefficienti di trasmissione. Essi possono essere misurati sulla CdS nel seguente modo: si traccia una retta che parte dal punto \mathbb{R} più a sinistra della CdS fino al punto di impedenza considerato; si misura questa distanza e si riporta nella scala più in basso (Transmission Coefficient).

Nel nostro caso:

$$\begin{cases} |1 + \Gamma_A| = 0.39 \\ |1 + \Gamma_B| = 1.57 \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$|V_B| = \frac{0.197 \cdot |V_G|}{0.39} \cdot 1.57 = 0.78 \cdot |V_G|$$

Quindi il valore in B risulta essere:

$$\frac{|V_B|}{|V_G|} = 0.78$$

A questo punto dobbiamo determinare i massimi e i minimi della forma d'onda.

$$\begin{cases} \max \{V(z)\} = |V(z)^+| \cdot \max \{|1 + \Gamma(z)|\} \\ \min \{V(z)\} = |V(z)^+| \cdot \min \{|1 + \Gamma(z)|\} \end{cases}$$

Sappiamo che $|V(z)^+| = |V_A^+|$ quindi i parametri da determinare sono:

$$\begin{cases} \max \{|1 + \Gamma(z)|\} = 1 + |\Gamma(z)| \\ \min \{|1 + \Gamma(z)|\} = 1 - |\Gamma(z)| \end{cases}$$

Come $|\Gamma(z)|$ conviene utilizzare $|\Gamma_A|$ per cui:

$$\begin{cases} 1 + |\Gamma(z)| = 1 + 0.62 = 1.62 \\ 1 - |\Gamma(z)| = 1 - 0.62 = 0.38 \end{cases}$$

Con questi valori possiamo determinare le quote sull'asse y di massimi e minimi:

$$\begin{cases} \max \{V(z)\} = \frac{|V_A|}{|1 + \Gamma_A|} \cdot 1 + |\Gamma(z)| = \frac{0.197 \cdot |V_G|}{0.39} \cdot 1.62 = 0.826 \cdot |V_G| \\ \min \{V(z)\} = \frac{|V_A|}{|1 + \Gamma_A|} \cdot 1 - |\Gamma(z)| = \frac{0.197 \cdot |V_G|}{0.39} \cdot 0.38 = 0.194 \cdot |V_G| \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \frac{\max\{V(z)\}}{|V_G|} = 0.826 \\ \frac{\min\{V(z)\}}{|V_G|} = 0.194 \end{cases}$$

I valori determinati, con una prima verifica veloce, sono esatti in quanto il massimo è maggiore del valore in B e il minimo è minore del valore in A; ovviamente se non fosse così occorre rifare tutti i calcoli.

Ora abbiamo quotato tutte le ampiezze della forma d'onda della tensione, passiamo dunque a quotare le distanze sull'asse x .

Abbiamo visto che in linea generale partendo da A si devono compiere un certo numero di giri sulla CdS per arrivare in B: questi giri avvengono seguendo la scala Wavelengths Toward Load perchè B è il carico della linea.

Posizionandoci in A incontriamo subito un punto di minimo:

$$\frac{D_1 \min \{V(z)\}}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big|_A + 0 = 0.009 + 0 = 0.009$$

La distanza tra A e il minimo è pari a:

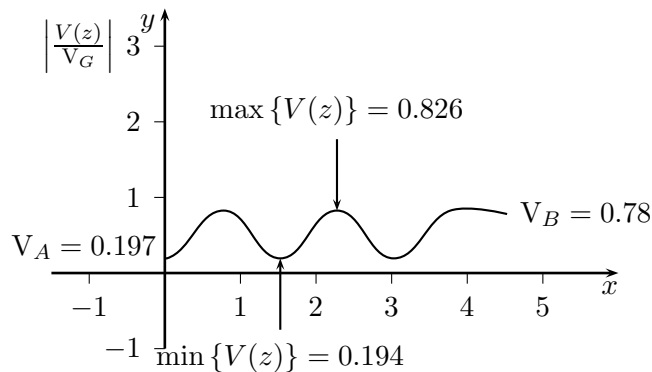
$$D_1 \min \{V(z)\} = 0.009 \cdot \lambda = 0.009 \cdot 3 = 0.027 \text{ cm}$$

Determinato il primo punto per gli altri è molto facile: infatti tra un minimo e quello seguente è presente una periodicità completa traducibile nella CdS con 0.5; per determinare i massimi invece è necessario compiere mezzo giro di CdS perchè saranno posti metà periodo dopo i minimi.

Sappiamo che per arrivare in B occorre fare all'incirca due rotazioni e mezzo (il termine aggiuntivo è 0.05) quindi:

- . due rotazioni forniranno due periodi completi (2 minimi e 2 massimi) partendo dal minimo D_1 ;
- . il punto più vicino ad A è un minimo quindi, una volta completati i due periodi mezza rotazione ci porta ad un massimo (D_6);
- . il termine aggiuntivo dal massimo ci porta in B il cui valore V_B sarà posto più in basso del massimo.

$$\begin{cases} D_2 \max \{V(z)\} = D_1 \min \{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 0.027 + 0.25 \cdot 3 = 0.777 \text{ cm} \\ D_3 \min \{V(z)\} = D_2 \max \{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 0.777 + 0.25 \cdot 3 = 1.527 \text{ cm} \\ D_4 \max \{V(z)\} = D_3 \min \{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 1.527 + 0.25 \cdot 3 = 2.277 \text{ cm} \\ D_5 \min \{V(z)\} = D_4 \max \{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 2.277 + 0.25 \cdot 3 = 3.027 \text{ cm} \\ D_6 \max \{V(z)\} = D_5 \min \{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 3.027 + 0.25 \cdot 3 = 3.777 \text{ cm} \\ D_{V_B} = D_6 \max \{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 3.777 + 0.25 \cdot 3 = 4.527 \text{ cm} \end{cases}$$



Attenzione: con queste dimensioni di scala non si riesce ad apprezzare bene il punto di minimo $D_1 \min \{V(z)\}$.

3.2.2 Esercizio 2

Testo

Considerando la linea di trasmissione riportata in figura 3.3, si disegnino i diagrammi d'onda stazionaria $\left| \frac{V(z)}{V_G} \right|$ e $\left| \frac{I(z)}{I_A} \right|$ nel tratto \overline{AB} , indicandone i valori assunti nelle sezioni A e B, i valori massimi e minimi e le rispettive posizioni a partire dalla sezione A sapendo che:

$$\begin{aligned} Z_L = 150 \Omega, \quad Z_G = (100 + j100) \Omega, \quad Z_\infty = 50 \Omega, \quad Z_{\infty 1} = 70 \Omega, \\ \overline{AB} = 12.5 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 15 \text{ cm}, \quad V_f = 2.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \\ \alpha|_{\text{dB}} = 2 \text{ dB/m}, \quad f = 2.5 \text{ GHz} \end{aligned}$$

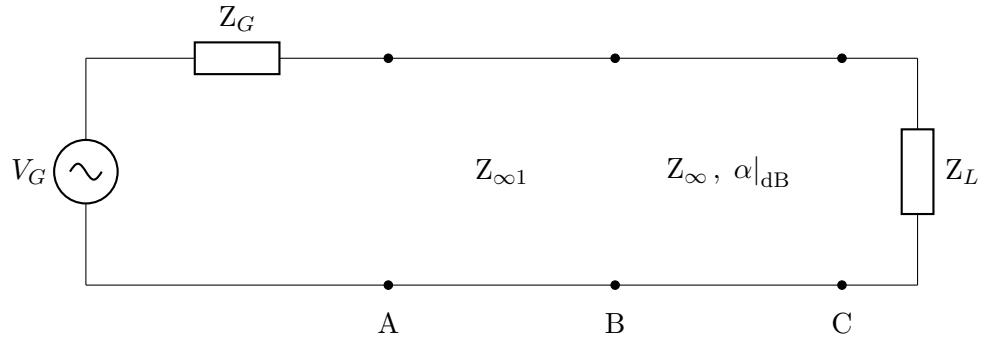


Figura 3.3: diagramma d'onda stazionaria esercizio 2

Risoluzione

. Diagramma in tensione

Ricaviamo inanzi tutto il valore della lunghezza d'onda λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{2.5 \cdot 10^8}{2.5 \cdot 10^9} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Come nell'esercizio precedente determiniamo prima il valore di impedenza in A.

Quindi, con i soliti passaggi calcoliamo:

$$\zeta_L = \zeta_C = \frac{Z_L}{Z_\infty} = \frac{150}{50} = 3$$

Per la prima volta incontriamo un valore di impedenza normalizzata puramente \mathbb{R} con lunghezza equivalente elettrica pari a 0.25.

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = \frac{l}{\lambda} \Big|_C + \frac{\overline{BC}}{\lambda} = 0.25 + \frac{15}{10} = 0.25 + 1.5 = 1.75 = 0.25$$

1.5 sono 3 giri completi di CdS.

Calcoliamo con la formula o dalla CdS il valore di $|\Gamma_C|$:

$$|\Gamma_C| = 0.49$$

La linea presenta attenuazioni quindi:

$$\text{An}|_{\text{dB}} = \alpha|_{\text{dB}} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 0.15 = 0.3 \text{ dB}$$

$$\text{An} = 10^{-\frac{\text{An}|_{\text{dB}}}{10}} = 10^{-\frac{0.3}{10}} = 0.93 \text{ Np}$$

$$|\Gamma_{B+}| = |\Gamma_C| \cdot \text{An} = 0.49 \cdot 0.93 = 0.456$$

Tracciando il cerchio a $|\Gamma_{B+}|$ costante e la retta che congiunge il centro della CdS e $\frac{l}{\lambda}|_{B+}$ possiamo determinare ζ_{B+} :

$$\zeta_{B+} = 2.70$$

da cui:

$$Z_B = \zeta_{B+} \cdot Z_{\infty} = 2.7 \cdot 50 = 135 \Omega$$

In B è presente una discontinuità:

$$\zeta_{(-B)} = \frac{Z_B}{Z_{\infty 1}} = \frac{135}{70} = 1.929$$

Il tratto \overline{AB} invece è senza perdite perciò ricaviamo ζ_A con il solito procedimento:

$$\frac{l}{\lambda}|_A = \frac{l}{\lambda}|_{(-B)} + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.25 + \frac{12.5}{10} = 0.25 + 1.25 = 1.5$$

quindi a partire dal valore di $\zeta_{(-B)}$ si fanno 2 giri e mezzo (1.25) sulla CdS per determinare il punto corrispondente a ζ_A .

$$\zeta_A = 0.52$$

da cui:

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_{\infty 1} = 0.52 \cdot 70 = 36.4 \Omega$$

A questo punto abbiamo ottenuto un circuito identico alla figura 3.2 da cui possiamo determinare:

$$\frac{|V_A|}{|V_G|} = \frac{|Z_A|}{|Z_A + Z_G|}$$

In generale il diagramma d'onda in tensione non è altro che:

$$\frac{|V(z)|}{|V_G|} = \frac{|V(z)|}{|V_A|} \cdot \frac{|V_A|}{|V_G|} = \frac{|V(z)|}{|V_A|} \cdot \frac{|Z_A|}{|Z_A + Z_G|}$$

ma scrivendo le tensione $V(z)$ e V_A come nella 1.10 otteniamo:

$$\frac{|V(z)|}{|V_G|} = \frac{|V(z)^+|}{|V_A^+|} \cdot \frac{|1 + \Gamma(z)|}{|1 + \Gamma_A|} \cdot \frac{|Z_A|}{|Z_A + Z_G|}$$

Come ben sappiamo la tensione progressiva si mantiene costante su tutta la linea quindi:

$$\frac{|V(z)|}{|V_G|} = \frac{|1 + \Gamma(z)|}{|1 + \Gamma_A|} \cdot \frac{|Z_A|}{|Z_A + Z_G|}$$

Calcoliamo il valore del coefficiente numerico:

$$|1 + \Gamma_A| \cdot \frac{|Z_A|}{|Z_A + Z_G|} = \frac{1}{0.68} \cdot \frac{36.4}{|136.4 + j100|} = 1.471 \cdot 0.215 = 0.316$$

Ovviamente il termine $|1 + \Gamma_A|$ rappresenta il coefficiente di trasmissione calcolato in ζ_A .

Il diagramma d'onda è richiesto solo per il tratto \overline{AB} ed è stato calcolato che per arrivare in B occorrono 2 giri e mezzo di CdS; inoltre poichè ζ_A e $\zeta_{(-B)}$ sono \mathbb{R} i valori di tensione in A e in B saranno anche i massimi e i minimi.

$$\left. \frac{|V(z)|}{|V_G|} \right|_A = 0.316 \cdot |1 + \Gamma_A| = 0.316 \cdot 0.68 = 0.215$$

$$\left. \frac{|V(z)|}{|V_G|} \right|_{(-B)} = 0.316 \cdot |1 + \Gamma_{(-B)}| = 0.316 \cdot 1.319 = 0.417$$

Le quote sull'asse x sono facili questa volta perchè A, valore iniziale, è posto in 0 quindi:

$$\begin{cases} D_{V_A} = 0 \\ D_{2\max}\{V(z)\} = D_{V_A} + 0.25 \cdot \lambda = 0 + 0.25 \cdot 10 = 2.5 \text{ cm} \\ D_{3\min}\{V(z)\} = D_{2\max}\{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 2.5 + 0.25 \cdot 10 = 5 \text{ cm} \\ D_{4\max}\{V(z)\} = D_{3\min}\{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 5 + 0.25 \cdot 10 = 7.5 \text{ cm} \\ D_{5\min}\{V(z)\} = D_{4\max}\{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 7.5 + 0.25 \cdot 10 = 10 \text{ cm} \\ D_{V_B} = D_{5\min}\{V(z)\} + 0.25 \cdot \lambda = 10 + 0.25 \cdot 10 = 12.5 \text{ cm} \end{cases}$$

È utile verificare che il punto B risulta essere proprio a 12.5 cm da A, lo stesso valore dato dal testo.

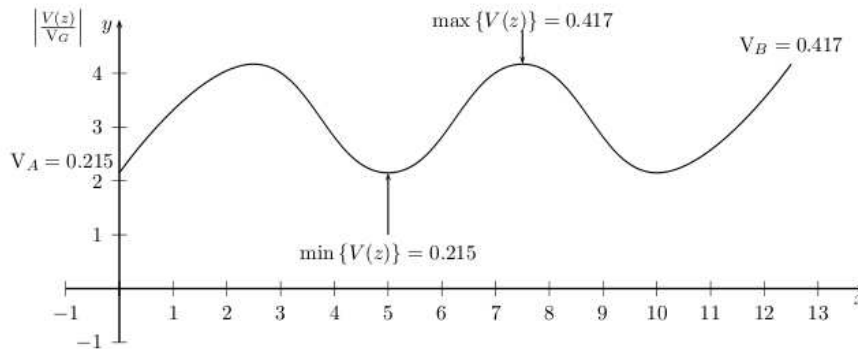


Figura 3.4: Diagramma in tensione

Attenzione: per esigenze di scala i fattori sull'asse x sono stati moltiplicati per un fattore 100, mentre l'asse y è tarato con valori moltiplicati per 10.

. Diagramma in corrente

Dato il diagramma d'onda del modulo della tensione è molto facile ricavare il diagramma del modulo della corrente.

Inanzi tutto non occorre più determinare le quote dell'asse x perchè rimangono invariate; inoltre dove c'era un massimo in tensione ci sarà un minimo in corrente e dove prima era presente un minimo in tensione ora ci sarà un massimo in corrente.

Queste condizioni di reciprocità derivano dal fatto che, come abbiamo visto in teoria:

$$V_{\Gamma} = -I_{\Gamma}$$

Per determinare i valori numerici partiamo dal punto iniziale A; la corrente in quel punto è I_A quindi:

$$\frac{|I_A|}{|I_A|} = 1 \text{ valore massimo perchè era minimo in tensione}$$

Nel punto B invece la quota sull'asse y da trovare è:

$$\frac{|I_B|}{|I_A|} \text{ valore minimo perchè era massimo in tensione}$$

Esplicitiamo il rapporto fra le correnti:

$$\frac{|I_B|}{|I_A|} = \frac{Y_{\infty} |V_B^+| \cdot |1 + \Gamma_B|}{Y_{\infty} |V_A^+| \cdot |1 + \Gamma_A|}$$

ma sappiamo che la tensione progressiva si mantiene costante sulla linea dunque:

$$\frac{|I_B|}{|I_A|} = \frac{|1 + {}^I\Gamma_B|}{|1 + {}^I\Gamma_A|} = \frac{|1 - {}^V\Gamma_B|}{|1 - {}^V\Gamma_A|}$$

poichè I_B è minimo:

$$\min \{I\} = \min \{|1 + {}^I\Gamma_B|\} = 1 - |{}^I\Gamma_B|$$

invece I_A è massima:

$$\max \{I\} = \max \{|1 + {}^I\Gamma_A|\} = 1 + |{}^I\Gamma_A|$$

Si ha che:

$$\frac{|I_B|}{|I_A|} = \frac{1 - |{}^V\Gamma_B|}{1 + |{}^V\Gamma_A|}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\frac{|I_B|}{|I_A|} = \frac{1 - 0.32}{1 + 0.32} = \frac{0.68}{1.32} = 0.515$$

Attenzione: per esigenze di scala i fattori sull'asse x sono stati moltiplicati per un fattore 100, mentre l'asse y è tarato con valori moltiplicati per 10.

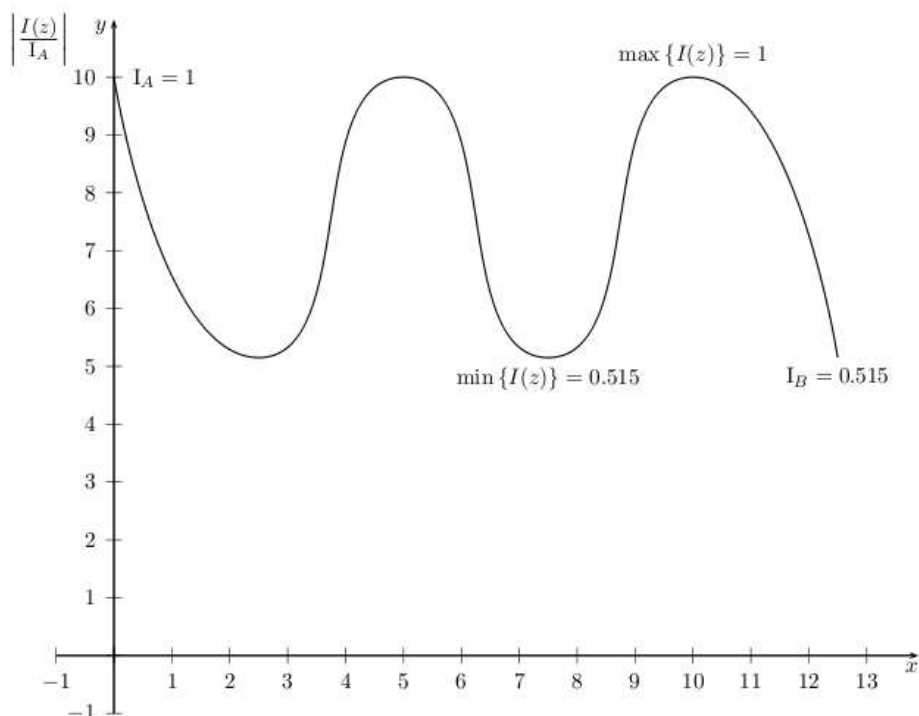


Figura 3.5: Diagramma in corrente

3.2.3 Esercizio 3

Testo

Nella sezione A della Linea di Trasmissione riportata in figura 3.6, si trova il massimo della tensione. Il ROS nel tratto di linea \overline{AB} (senza perdite) vale 3. Si calcoli il valore di impedenza del carico Z_L nel caso in cui il tratto \overline{BC} sia senza perdite e nel caso in cui il tratto \overline{BC} sia una linea con perdite ($\alpha_{dB} = 2 \text{ dB/m}$).

$$\begin{aligned} Z_\infty &= 50 \Omega, & V_f &= c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, & f &= 100 \text{ MHz} \\ \overline{AB} &= 1 \text{ m}, & \overline{BC} &= 1.05 \text{ m}, & \overline{BD} &= 0.67 \text{ m} \end{aligned}$$

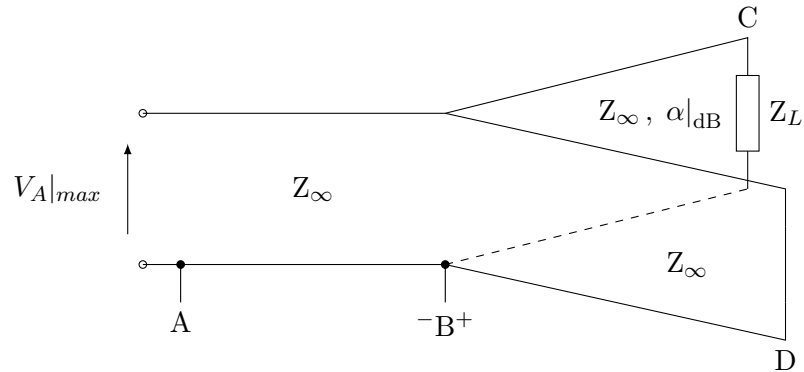


Figura 3.6: diagramma d'onda stazionaria esercizio 3

Risoluzione

Procediamo a calcolare il valore della lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 3 \text{ m}$$

Come abbiamo visto dalla teoria il ROS, per la 3.2 vale:

$$S = \frac{1 + |\Gamma_A|}{1 - |\Gamma_A|} = 3$$

Possiamo dunque determinare il valore di $|\Gamma_A|$:

$$\frac{1 + |\Gamma_A|}{1 - |\Gamma_A|} = 3 \Rightarrow 1 + |\Gamma_A| = 3 - 3|\Gamma_A| \Rightarrow 4|\Gamma_A| = 2 \Rightarrow |\Gamma_A| = 0.5$$

Il testo del problema dice che in A la tensione è massima quindi sulla CdS sarà su un punto \mathbb{R} con lunghezza elettrica equivalente 0.25. Ricaviamo il valore dell'ammettenza in ^{-}B :

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{(-B)} = \frac{l}{\lambda} \Big|_A + \frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.25 + \frac{1}{3} = 0.25 + 0.333 = 0.583 = 0.083$$

Questo tratto di linea è senza perdite quindi si ricava dalla CdS il valore di $\zeta_{(-B)}$:

$$\zeta_{(-B)} = (0.42 - j0.5)$$

ma siccome la linea presenta una giunzione di due rami conviene ragionare in ammettenza:

$$y_{(-B)} = (1 + j1.2)$$

da cui si ottiene:

$$Y_B = Y_{(-B)} = y_{(-B)} \cdot Y_\infty = (1 + j1.2) \cdot \frac{1}{50} = (0.02 + j0.024) \text{ S}$$

Ora si calcola il valore dell'impedenza riportata in B^+ nel tratto \overline{BD} ; si parte dal cortocircuito in impedenza e girando sulla CdS toward generator si ha:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+} = \frac{l}{\lambda} \Big|_D + \frac{\overline{BD}}{\lambda} = 0 + \frac{0.67}{3} = 0 + 0.223 = 0.223$$

Anche questo tratto di linea è senza perdite quindi $|\Gamma_D| = |\Gamma_{B^+}^{\overline{BD}}|$; l'intersezione tra la retta passante per il centro della CdS e $\frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+}$ con il cerchio a $|\Gamma_{B^+}^{\overline{BD}}|$ costante permette di ricavare:

$$y_{B^+}^{\overline{BD}} = -j0.107$$

$$Y_{B^+}^{\overline{BD}} = y_{B^+}^{\overline{BD}} \cdot Z_\infty = -j0.107 \cdot \frac{1}{50} = -j0.002 \text{ S}$$

Ora possiamo calcolare il valore di impedenza solo nel tratto \overline{BC} in quanto:

$$Y_{B^+} = Y_{B^+}^{\overline{BC}} + Y_{B^+}^{\overline{BD}}$$

$$Y_{B^+}^{\overline{BC}} = Y_{B^+} - Y_{B^+}^{\overline{BD}} = (0.02 + j0.024) - j0.002 = (0.02 + j0.022) \text{ S}$$

$$y_{B^+}^{\overline{BC}} = Y_{B^+}^{\overline{BC}} \cdot Z_\infty = (0.02 + j0.022) \cdot 50 = (1 + j1.1)$$

A questo punto le ammettenze non servono, quindi dalla CdS ricaviamo:

$$\zeta_{B^+}^{\overline{BC}} = (0.26 - j0.5) \text{ e } \left| \Gamma_{B^+}^{\overline{BC}} \right| = 0.46$$

. Caso linea senza perdite

Per determinare Z_L è sufficiente far cambiare di fase l'impedenza $\zeta_{B^+}^{\overline{BC}}$ in quanto $\left| \Gamma_{B^+}^{\overline{BC}} \right|$ non cambia.

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_C = \frac{l}{\lambda} \Big|_{B^+}^{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\lambda} = 0.086 + \frac{1.05}{3} = 0.086 + 0.35 = 0.436$$

Facilmente si ottiene:

$$\zeta_L = (0.42 + j0.18)$$

$$Z_L = \zeta_L \cdot Z_\infty = (0.42 + j0.18) \cdot 50 = (21 + j18) \Omega$$

. Caso linea con perdite

In questo caso il valore di $|\Gamma_{B^+}^{\overline{BC}}|$ aumenta. Finora in tutti gli esercizi con perdite visti si partiva dal carico per determinare impedenza o ammettenza equivalente al generatore; ora è il contrario quindi:

$$|\Gamma_C| = |\Gamma_{B^+}^{\overline{BC}}| / A_n$$

Calcoliamo il valore delle attenuazioni:

$$A_n|_{\text{dB}} = \alpha|_{\text{dB}} \cdot \overline{AB} = 2 \cdot (1.05) = 2.1 \text{ dB attenuazione totale del tratto } \overline{BC}$$

Data l'attenuazione totale $A_n|_{\text{dB}}$ ricaviamo l'attenuazione A_n lineare:

$$A_n = 10^{-\frac{A_n|_{\text{dB}}}{10}} = 10^{-\frac{2.1}{10}} = 0.617 \text{ Np}$$

$$|\Gamma_C| = |\Gamma_{B^+}^{\overline{BC}}| / A_n = \frac{0.46}{0.617} = 0.746$$

La lunghezza equivalente elettrica in C è già stata calcolata in precedenza quindi l'intersezione fra retta e cerchio a $|\Gamma_C|$ costante è:

$$\zeta_L = (0.16 + j0.41)$$

$$Z_L = \zeta_L \cdot Z_\infty = (0.16 + j0.41) \cdot 50 = (8 + j20.5) \Omega$$

Capitolo 4

Adattatori

4.1 Teoria

4.1.1 Condizioni di adattamento

Gli adattatori risolvono il problema di massimizzare la potenza sulla linea annullando l'onda regressiva: in questo modo della potenza rimane solo il termine progressivo o incidente sul carico mentre la parte regressiva, che torna verso il generatore in quanto riflessa, viene eliminata.

Dall'equazione 2.6 sappiamo che:

$$P_B = P_A \cdot A_n \cdot A_d$$

La potenza su B sarà massima se:

$$\text{su A la potenza è massima } P_A = P_{\text{disp}} \quad (4.1)$$

$$\text{sulla linea non vi sono disadattamenti } A_d = 1 \quad (4.2)$$

La condizione 4.1 si verifica solo se:

$${}^K\Gamma = 0$$

Se questa ipotesi è verificata allora:

$$P_A = P_{\text{disp}} \cdot [1 - |{}^K\Gamma|^2] \implies P_A = P_{\text{disp}} \cdot [1 - 0] \implies P_A = P_{\text{disp}}$$

Per far sì che ${}^K\Gamma = 0$ è sufficiente:

$$Z_A = Z_G^*$$

Questa condizione prende il nome di **adattamento energetico**. Gli adattatori energetici vengono generalmente posti tra l'impedenza interna del generatore e il punto "A" della linea, ovviamente per garantire che al circuito arrivi la massima potenza erogabile. Tuttavia non è esclusa la possibilità di

costruire adattatori energetici in punti qualsiasi; negli esercizi, comunque, quando si parla di adattamento energetico si considerano solo quelli posti all'inizio della linea di trasmissione.

Analizziamo ora la condizione 4.2:

$$A_d = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{[1 - |\Gamma_B|^2]}{[1 - |\Gamma_A|^2]} = 1$$

Si realizza questa ipotesi se:

$$\Gamma_B = 0 \quad \Longrightarrow \quad Z_B = Z_L = Z_\infty$$

Si parla in questo caso di **adattamento di uniformità** in quanto *uniforma* la linea eliminando i disadattamenti.

Quando entrambe le condizioni sono verificate si ha:

$$P_B = P_{\text{disp}} \cdot A_n$$

Attenzione: i termini dovuti alle perdite A_n non possono essere eliminati in nessun modo perchè sono *fisiologici* di una linea.

4.1.2 Tipi di adattatori

Esistono alcune categorie di circuiti che realizzano adattamento:

- . trasformatori di impedenza a $\lambda/4$;
- . trasformatori di impedenza a stub.

Per affrontare gli esercizi tratteremo solo gli adattatori a stub.

Essi si suddividono ancora in due tipi:

- . adattatori a L diritto;
- . adattatori a L rovescio.

Questi nomi sono dovuti al fatto che lo stub è un tratto di linea che si aggiunge al punto in cui si vuole realizzare l'adattamento e il circuito assomiglia ad una L; lo stub può terminare in cortocircuito o circuito aperto ed essere induttivo oppure capacitivo.

Capiremo bene negli esercizi come riconoscere le differenze.

Vediamo nelle figure:

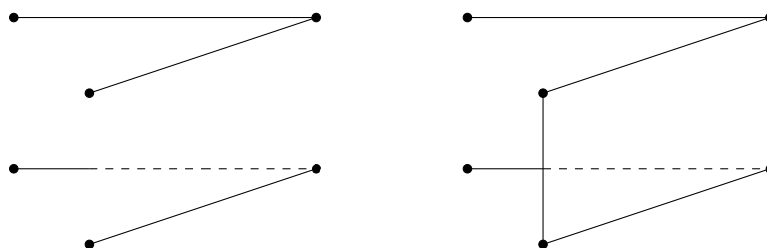


Figura 4.1: adattatori L rovescio in circuito aperto e cortocircuito

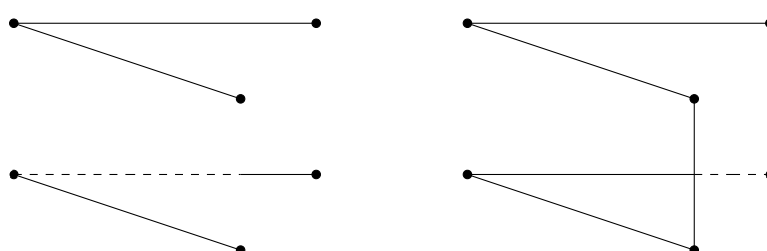


Figura 4.2: adattatori L diretto in circuito aperto e cortocircuito

Quasi sempre capita che, date alcune specifiche nel testo, si possa realizzare solo un tipo tra i 4 possibili; ad esempio nel tema d'esame del 19-02-2009 un'esercizio consisteva nel determinare quale fosse l'adattatore a stub con lunghezza minima: era quindi necessario provare le 4 combinazioni e scegliere di conseguenza.

4.2 Esercizi

4.2.1 Esercizio 1

Testo

Progettare un adattatore energetico con stub capacitivo minimizzando la lunghezza della linea e dello stub nella linea di trasmissione mostrata in figura 4.3, sapendo che:

$$Z_G = (250 - j250) \Omega, \quad Z_L = (25 - j25) \Omega, \quad Z_\infty = 50 \Omega$$

$$V_f = 1.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad f = 5 \text{ GHz}$$

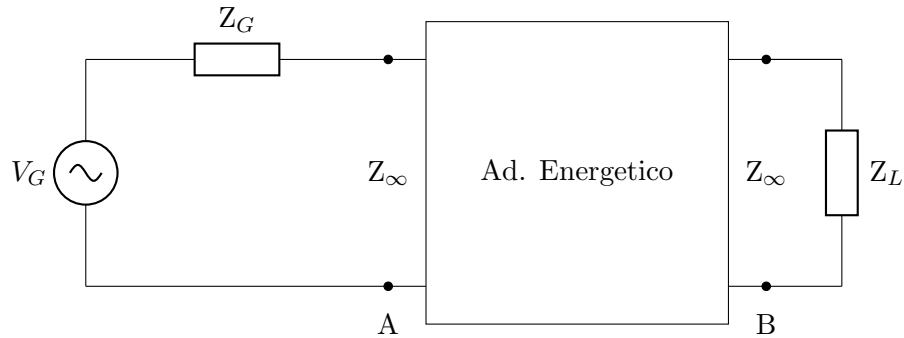


Figura 4.3: adattatori esercizio 1

Risoluzione

Il testo chiede un adattatore energetico; per la 4.1 la condizione da imporre è:

$$Z_A = Z_G^*$$

Calcoliamo i parametri necessari per realizzare l'adattamento:

$$\zeta_L = \frac{Z_L}{Z_\infty} = \frac{(25 - j25)}{50} = (0.5 - j0.5)$$

$$y_L = (1 + j) \text{ dalla CdS}$$

$$\Gamma_L = \frac{\zeta_L - 1}{\zeta_L + 1} = \frac{(0.5 - j0.5) - 1}{(0.5 - j0.5) + 1} = \frac{-0.5 - j0.5}{1.5 - j0.5} = (0.2 - j0.4)$$

$$|\Gamma_L| = 0.45$$

Imponendo la condizione per effettuare l'adattamento ricaviamo gli altri parametri:

$$\zeta_A = \frac{Z_A}{Z_\infty} = \frac{Z_G^*}{Z_\infty} = \frac{(250 + j250)}{50} = (5 + j5)$$

$$y_A = (0.1 - j0.1) \text{ dalla CdS}$$

$$\Gamma_A = \frac{\zeta_A - 1}{\zeta_A + 1} = \frac{(5 + j5) - 1}{(5 + j5) + 1} = \frac{4 + j5}{6 + j5} = (0.475 - j0.164)$$

$$|\Gamma_A| = 0.5$$

Progetto L Diritto

Con questo progetto avremo una linea di questo tipo:

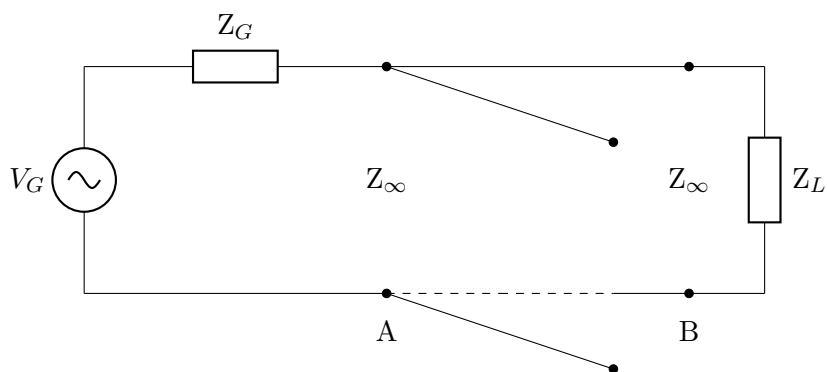
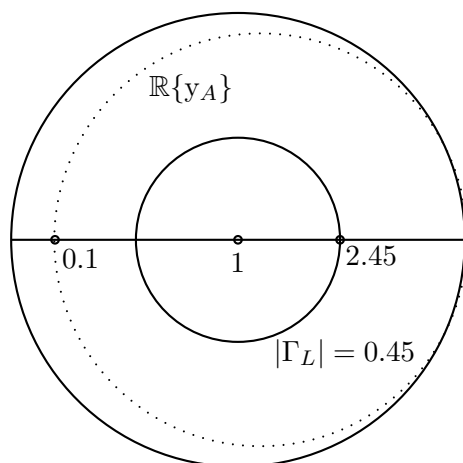


Figura 4.4: linea con adattatore L diritto

Ovviamente prima bisogna verificare che il progetto sia realizzabile: se il cerchio a $|\Gamma_L|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_A\}$ (disegnato con tratto a punti) hanno intersezioni allora possiamo continuare con il progetto.

Dalla CdS osserviamo che:



non ci sono intersezioni; in questo esercizio non si può utilizzare l'adattatore L diritto.

Progetto L Rovescio

Con l'adattatore L rovescio si otterrà una linea di questo tipo:

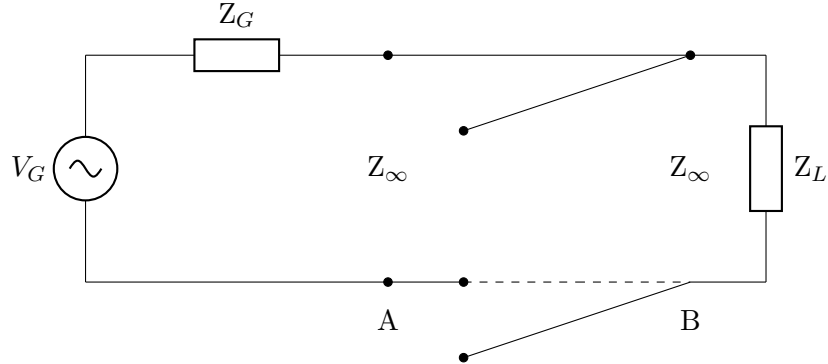
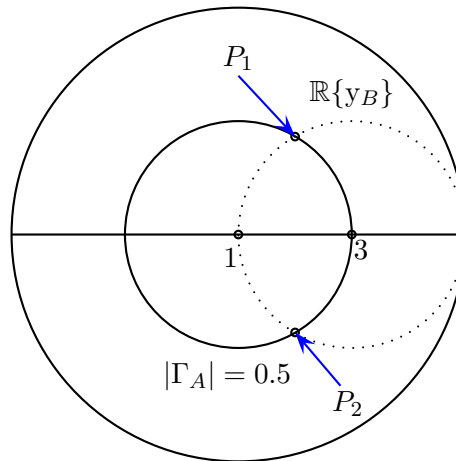


Figura 4.5: linea con adattatore L rovescio

In questo caso occorre verificare che il cerchio a $|\Gamma_A|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_L\} = \mathbb{R}\{y_B\}$ (disegnato con tratto a punti) abbiano intersezioni.

Dalla CdS osserviamo:



in questo caso troviamo due intersezioni P_1 e P_2 che rappresentano il valore dell'ammettenza normalizzata nel punto $-B$.

$$\begin{cases} P_1 = y_{(-B)} = (1 + j2.9) \\ P_2 = y_{(-B)} = (1 - j2.9) \end{cases}$$

Nel punto $-B$ si ha un'ammettenza $y_{(-B)}$ pari a:

$$Y_{(-B)} = Y_L + Y_{stub}$$

quindi possiamo ricavare y_{stub} come:

$$Y_{stub} = Y_{(-B)} - Y_L$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{cases} y_{stub} = (1 + j2.9) - (1 + j) = j1.9 \\ y_{stub} = (1 - j2.9) - (1 + j) = -j2.9 \end{cases}$$

Il testo del problema specifica di progettare uno stub capacitivo: andremo dunque a scegliere il termine di segno positivo tra le due soluzioni trovate; se invece si richiedeva uno stub induttivo la scelta sarebbe stata quella del termine con segno negativo.

Il punto che permette di avere stub capacitivo è:

$$P_1 = (1 + j2.9)$$

Scelto il punto passiamo a determinare la lunghezza della linea.

Partiamo dall'equivalente elettrico di $y_{(-B)}$ e calcoliamo con un procedimento contrario al solito:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\lambda} &= \frac{l}{\lambda} \Big|_{(-B)} - \frac{l}{\lambda} \Big|_A \\ \lambda &= \frac{V_f}{f} = \frac{1.5 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 0.03 \text{ m} \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{\overline{AB}}{\lambda} = 0.298 - 0.016 = 0.282$$

$$\overline{AB} = 0.282 \cdot \lambda = 0.282 \cdot 0.03 = 0.00846 \text{ m} = 8.46 \text{ mm}$$

Determiniamo ora la lunghezza dello stub.

$$y_{stub} = j1.9$$

Piazziamo il punto sulla CdS; ruotiamo toward load perchè y_{stub} si trova all'inizio della *linea di stub* quindi il punto che cerchiamo è un carico a tutti gli effetti; determiniamo il punto più vicino fra i due carichi noti conosciuti (corto circuito e circuito aperto): nel nostro caso troviamo il circuito aperto in ammettenza.

Si deduce quindi che lo stub termina con un circuito aperto proprio come in

figura 4.5.

Calcoliamo ora la lunghezza:

$$\frac{l}{\lambda} \Big|_{stub} = 0.173$$

$$\frac{stub}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big|_{stub} - \frac{l}{\lambda} \Big|_{Circuito\ aperto} = 0.173 - 0 = 0.173$$

$$stub = 0.173 \cdot \lambda = 0.173 \cdot 0.03 = 0.00519 \text{ m} = 5.19 \text{ mm}$$

Attenzione: esiste un'alternativa al metodo riportato sopra per la scelta del carico noto della linea di stub. Nella risoluzione ho riportato quello che ho sempre utilizzato io, ma comunque cito anche l'altra metodologia perchè si possa poi scegliere quella ritenuta migliore e più congegniale.

In questo caso si parte non dal punto y_{stub} , ma da un carico noto. Girando sulla CdS Toward Generator si confronta la lunghezza ottenuta partendo una volta da cortocircuito e una volta da circuito aperto e ovviamente si sceglie il carico che minimizza tale lunghezza. La scala da usare è Wavelengths Toward Generator perchè si parte dal carico quindi il punto di arrivo y_{stub} sarà *verso* il generatore.

4.2.2 Esercizio 2

Testo

Progettare l'adattatore energetico con lunghezza di stub e della linea minime per la linea di trasmissione in figura 4.6 e l'adattatore di uniformità L dirritto; entrambi gli adattatori devono avere stub induttivi; calcolare quindi la potenza dissipata sul carico nel caso in cui siano presenti gli adattatori e nel caso in cui non ci siano sapendo che:

$$\begin{aligned} Z_G &= (200 + j50) \Omega, & Z_L &= (100 + j100) \Omega, & Z_{\infty 1} &= 50 \Omega, \\ Z_{\infty 2} &= 75 \Omega, & V_f &= 2.8 \cdot 10^8 \text{ m/s}, & f &= 600 \text{ MHz}, \\ V_G &= 100 \text{ V}_{\text{eff}}, & \overline{BC} &= 50 \text{ m}, & \alpha|_{\text{dB}} &= 0.1 \text{ dB/m} \end{aligned}$$

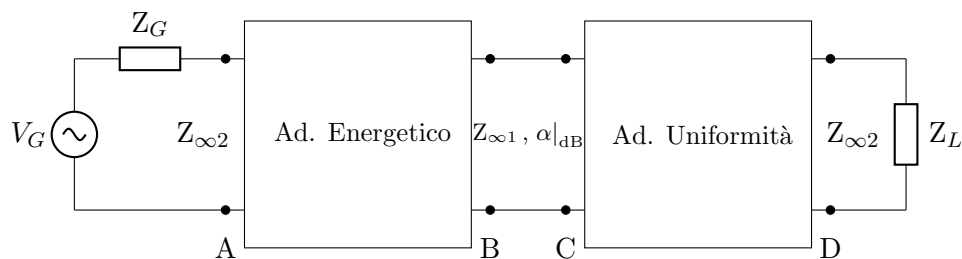


Figura 4.6: adattatori esercizio 2

Risoluzione

Calcoliamo inanzi tutto il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{2.8 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^6} = 0.467 \text{ m}$$

. Progetto dell'adattatore di uniformità

I parametri per progettare l'adattatore di uniformità L-dirritto sono:

$$\zeta_D = \zeta_L = \frac{Z_L}{Z_{\infty 2}} = \frac{(100 + j100)}{75} = (1.33 + j1.33)$$

$$y_D = (0.35 - j0.35)$$

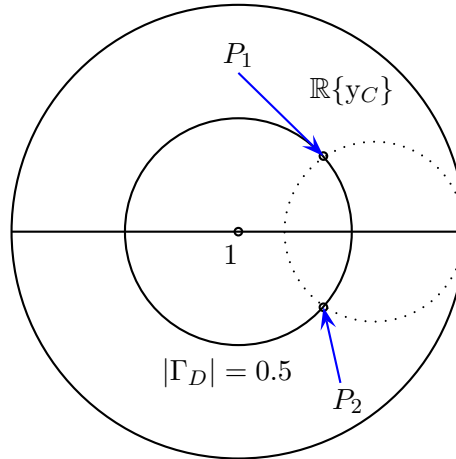
$$|\Gamma_D| = \frac{|\zeta_D - 1|}{|\zeta_D + 1|} = \frac{|(1.33 + j1.33) - 1|}{|(1.33 + j1.33) + 1|} = \frac{|0.33 + j1.33|}{|2.33 + j1.33|} = 0.5$$

La condizione da imporre affinché l'adattatore sia di uniformità, per la 4.2 é che in C non ci sia riflessione, perciò $Z_C = Z_{\infty 1}$:

$$\zeta_C = \frac{Z_C}{Z_{\infty 2}} = \frac{Z_{\infty 1}}{Z_{\infty 2}} = \frac{50}{75} = 0.667$$

$$y_C = \frac{1}{\zeta_C} = \frac{1}{0.667} = 1.5$$

Analizziamo ora la CdS: se il cerchio a $|\Gamma_D|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_C\}$ (disegnato con tratto a punti) hanno intersezioni è possibile progettare l'adattatore di uniformità L diritto.



Si ottengono due intersezioni P_1 e P_2 che rappresentano il valore dell'ammettanza normalizzata nel punto C^+ .

$$\begin{cases} P_1 = y_{C^+} = (1.5 + j1.5) \\ P_2 = y_{C^+} = (1.5 - j1.5) \end{cases}$$

Nel punto C si ha un'ammettanza y_C pari a:

$$y_C = y_{C^+} + y_{stub}$$

quindi possiamo ricavare y_{stub} come:

$$y_{stub} = y_C - y_{C^+}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{cases} y_{stub} = 1.5 - (1.5 + j1.5) = -j1.5 \text{ con il punto } P_1 \\ y_{stub} = 1.5 - (1.5 - j1.5) = j1.5 \text{ con il punto } P_2 \end{cases}$$

Poichè il problema chiedeva uno stub induttivo si sceglie il punto:

$$P_1 = (1.5 + j1.5)$$

Ora calcoliamo la lunghezza della linea:

$$\frac{\overline{CD}}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big|_D + \frac{l}{\lambda} \Big|_{P_1} = (0.5 - 0.44) + 0.194 = 0.254$$

$$\overline{CD} = 0.254 \cdot \lambda = 0.254 \cdot 0.467 = 0.119 \text{ m} = 11.9 \text{ cm}$$

Il calcolo della lunghezza della linea prevede di conoscere le lunghezze elettriche che intercorrono fra due punti, quindi poichè il punto y_D si trova molto vicino allo 0 della CdS si provvede a *spezzare* il conto in due: una prima parte fra y_D e lo 0, una seconda fra lo 0 e P_1 .

Calcolo delle lunghezze dello stub partendo dal punto $y_{stub} = -j1.5$ sulla CdS: girando toward load il primo carico noto che si incontra è il cortocircuito.

$$\frac{stub}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big|_{stub} - \frac{l}{\lambda} \Big|_{Cortocircuito} = 0.334 - 0.25 = 0.094$$

$$stub = 0.094 \cdot \lambda = 0.094 \cdot 0.467 = 0.0439 \text{ m} = 4.39 \text{ cm}$$

A questo punto abbiamo un circuito di questo tipo:

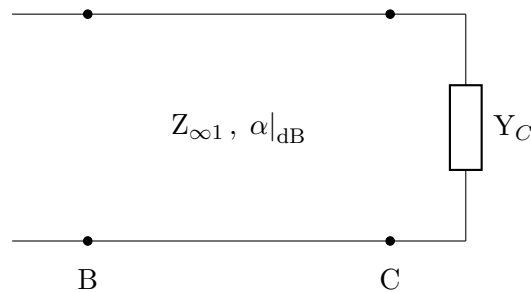


Figura 4.7: circuito intermedio

$$Y_C = y_C \cdot Y_{\infty 2} = 1.5 \cdot \frac{1}{75} = 0.02 \text{ S}$$

$$Z_C = \frac{1}{Y_C} = 50 \Omega$$

$$\zeta_C = \frac{Z_C}{Z_{\infty 1}} = 1 \implies \Gamma_C = 0$$

La linea avrebbe perdite, ma:

$$|\Gamma_B| = |\Gamma_C| \cdot An = 0 \cdot An = 0$$

Per cui:

$$Z_B = Z_C = Z_{\infty 1} = 50 \Omega$$

. Progetto dell'adattatore energetico

Determiniamo i parametri; la condizione da imporre è, per la 4.1:

$$Z_A = Z_G^*$$

Quindi:

$$\zeta_A = \frac{Z_A}{Z_{\infty 2}} = \frac{Z_G^*}{Z_{\infty 2}} = \frac{(250 - j50)}{50} = (2.67 - j0.67)$$

$$y_A = (0.35 + j0.35) \text{ dalla CdS}$$

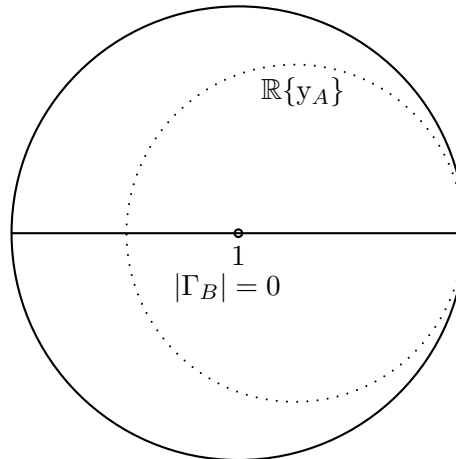
$$|\Gamma_A| = \frac{|\zeta_A - 1|}{|\zeta_A + 1|} = \frac{|(2.67 - j0.67) - 1|}{|(2.67 - j0.67) + 1|} = \frac{|(1.67 - j0.67)|}{|(3.67 - j0.67)|} = 0.23$$

E i parametri del punto B:

$$y_B = \frac{y_B}{Z_{\infty 2}} = \frac{Z_{\infty 1}}{Z_{\infty 2}} = \frac{75}{50} = 1.5$$

$$|\Gamma_B| = 0$$

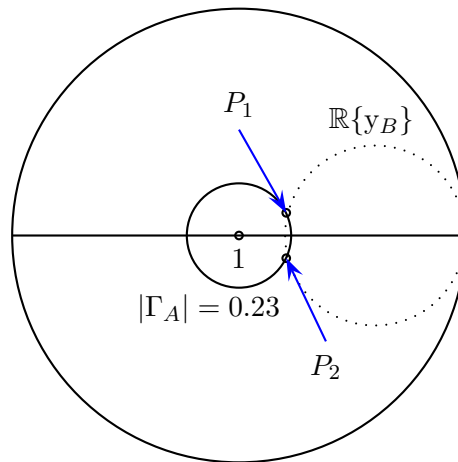
Verifichiamo la condizione per cui è possibile realizzare l'adattatore L diretto ovvero che il cerchio a $|\Gamma_B|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_A\}$ (disegnato con tratto a punti) abbiano intersezioni. Sulla CdS:



non vi sono intersezioni quindi non è possibile progettare l'adattatore L diretto.

Verifichiamo allora le condizioni per l'adattatore L rovescio: se il cerchio a $|\Gamma_A|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_B\}$ (disegnato con tratto a punti) hanno intersezioni allora il progetto è possibile.

Sulla CdS:



in questo caso troviamo due intersezioni P_1 e P_2 che rappresentano il valore dell'ammettenza normalizzata nel punto ^-B .

$$\begin{cases} P_1 = y_{(-B)} = (1.5 + j1.25) \\ P_2 = y_{(-B)} = (1.5 - j1.25) \end{cases}$$

Nel punto ^-B si ha un'ammettenza $y_{(-B)}$ pari a:

$$y_{(-B)} = y_B + y_{stub}$$

quindi possiamo ricavare y_{stub} come:

$$y_{stub} = y_{(-B)} - y_B$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{cases} y_{stub} = (1.5 + j1.25) - 1.5 = j1.25 \text{ con il punto } P_1 \\ y_{stub} = (1.5 - j1.25) - 1.5 = -j1.25 \text{ con il punto } P_2 \end{cases}$$

Si sceglie dunque il punto P_2 perchè lo stub deve essere induttivo.

Ora calcoliamo la lunghezza della linea:

$$\frac{\overline{AB}}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big|_A + \frac{l}{\lambda} \Big|_{P_2} = 0.016 + 0.192 = 0.208$$

$$\overline{CD} = 0.208 \cdot \lambda = 0.208 \cdot 0.467 = 0.971 \text{ m} = 9.71 \text{ cm}$$

Calcoliamo le lunghezze dello stub partendo dal punto $y_{stub} = -j1.25$ sulla CdS: girando toward load il primo carico noto che si incontra è il cortocircuito.

$$\frac{stub}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big|_{stub} - \frac{l}{\lambda} \Big|_{Cortocircuito} = 0.357 - 0.25 = 0.107$$

$$stub = 0.107 \cdot \lambda = 0.107 \cdot 0.467 = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

La linea di trasmissione risultante è:

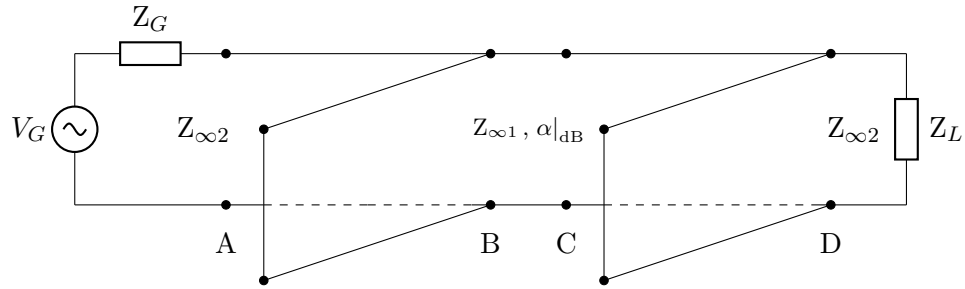


Figura 4.8: linea di trasmissione completa

. Calcolo della potenza con adattamento

Poichè è presente l'adattatore di uniformità $P_L = P_D = P_C$.

$$P_C = P_B \cdot An$$

non è presente il termine Ad perchè la linea è adattata e $P_B = P_A$.

$$P_A = P_{\text{disp}} \cdot (1 - |\Gamma^K|^2)$$

ma $|\Gamma^K| = 0$ per l'adattamento energetico.

Quindi:

$$P_L = P_A \cdot An = P_{\text{disp}} \cdot An = \frac{V_G^2}{4 \cdot \text{Re}\{Z_G\}} \cdot An$$

Calcoliamo dunque il termine An:

$$An|_{\text{dB}} = \alpha \cdot \overline{BC} = 0.1 \cdot 50 = 5 \text{ dB}$$

$$An = 10^{\frac{-5}{10}} = 10^{-0.5} = 0.316 \text{ Np}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$P_L = \frac{100^2}{4 \cdot 200} \cdot 0.316 = \frac{10000}{800} \cdot 0.316 = 12.5 \cdot 0.316 = 3.95 \text{ W}$$

. Calcolo della potenza senza adattamento

Senza adattamento la linea di trasmissione è di questo tipo:

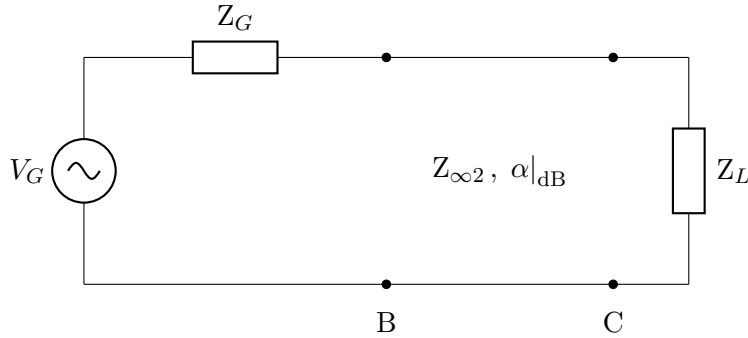


Figura 4.9: circuito senza adattatori

Calcoliamo nel solito modo:

$$\zeta_L = \zeta_C = \frac{Z_L}{Z_{\infty 2}} = \frac{(100 + j100)}{50} = (2 + j2)$$

$$|\Gamma_C| = \frac{|\zeta_C - 1|}{|\zeta_C + 1|} = \frac{|(2 + j2) - 1|}{|(2 + j2) + 1|} = \frac{|1 + j2|}{|3 + j2|} = 0.62$$

$$|\Gamma_B| = |\Gamma_C| \cdot A_n = 0.62 \cdot 0.316 = 0.196$$

$$\left. \frac{l}{\lambda} \right|_{B^+} = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_C + \frac{\overline{BC}}{\lambda} = 0.29 + 107.07 = 107.36 = 0.36$$

$$\zeta_B = (0.67 + j0.02)$$

$$Z_B = \zeta_B \cdot Z_{\infty 1} = (0.67 + j0.02) \cdot 50 = (33.5 + j) \Omega$$

Calcolo della potenza nel punto B:

$$P_B = P_{\text{disp}} \cdot (1 - |\Gamma_B|^2)$$

$$P_{\text{disp}} = 12.5 \text{ W}$$

$$|\Gamma_B| = \frac{|Z_B - Z_G^*|}{|Z_B + Z_G|} = \frac{|(33.5 + j) - (200 - j50)|}{|(33.5 + j) + (200 + j50)|} = \frac{|166.5 + j51|}{|233.5 + j51|} = \frac{174.14}{239} = 0.73$$

Sostituendo i valori numerici:

$$P_B = 12.5 \cdot (1 - 0.73^2) = 5.84 \text{ W}$$

Calcolo della potenza nel punto C:

$$P_L = P_C = P_B \cdot A_n \cdot A_d = P_B \cdot A_n \cdot \frac{1 - |\Gamma_C|^2}{1 - |\Gamma_B|^2}$$

$$P_L = 5.84 \cdot 0.316 \cdot \frac{1 - 0.62^2}{1 - 0.196^2} = 5.84 \cdot 0.316 \cdot 0.64 = 1.18 \text{ W}$$

Capitolo 5

Matrice Scattering

5.1 Teoria

Con la matrice scattering si identifica sostanzialmente un dispositivo multi-porta.

Prendiamo in considerazione il caso più semplice, con 2 porte, perchè generalmente negli esercizi si affronta solo questa tipologia:

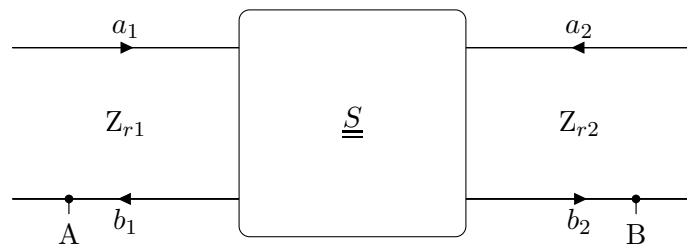


Figura 5.1: dispositivo a 2 porte

- . a_1 e b_2 rappresentano le onde progressive;
- . b_1 e a_2 rappresentano le onde regressive;
- . Z_{r1} è l'impedenza di riferimento alla porta 1;
- . Z_{r2} è l'impedenza di riferimento alla porta 2.

La matrice S è del tipo:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

I termini a_1 , a_2 , b_1 e b_2 valgono:

$$a_1 = \frac{V_{A^+}^+}{\sqrt{Z_{r1}}} \quad a_2 = \frac{V_{B^-}^+}{\sqrt{Z_{r2}}}$$

$$b_1 = \frac{V_{A^+}^-}{\sqrt{Z_{r1}}} \quad b_2 = \frac{V_{B^-}^-}{\sqrt{Z_{r2}}}$$

Sistema che descrive il comportamento del dispositivo:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (5.1)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad (5.2)$$

Se fossero presenti più di due porte il sistema avrebbe tante equazioni quante sono le porte presenti nel dispositivo.

Calcolo dei coefficienti della matrice \mathbf{S}

1. Per calcolare S_{11} si parte dalla equazione 5.1; se l'onda regressiva a_2 è nulla allora:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

L'unico modo per annullare un'onda regressiva è chiudere la linea su un carico adattato, il cui valore di impedenza è pari a quella di riferimento. In questo caso per annullare l'onda regressiva vista dalla porta 1 occorre chiudere la porta 2 in questo modo:

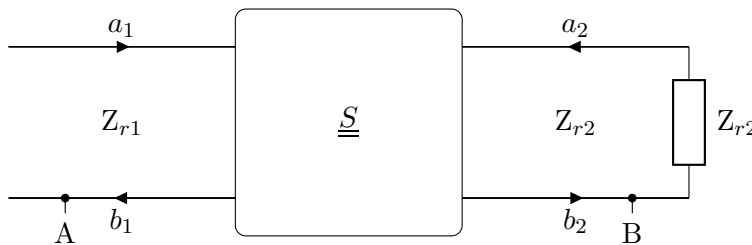


Figura 5.2: circuito con porta 2 chiusa su carico adattato

Sappiamo che il rapporto tra un'onda regressiva e un'onda progressiva è il coefficiente di riflessione. Il termine S_{11} è dunque Γ_A .

2. Per analogia calcoliamo il termine S_{22} ; questa volta si parte dalla equazione 5.2 e nel caso l'onda regressiva a_1 vista dalla porta 2 sia nulla si avrà:

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Per eliminare l'onda regressiva a_1 si deve chiudere la porta 1 con un carico adattato:

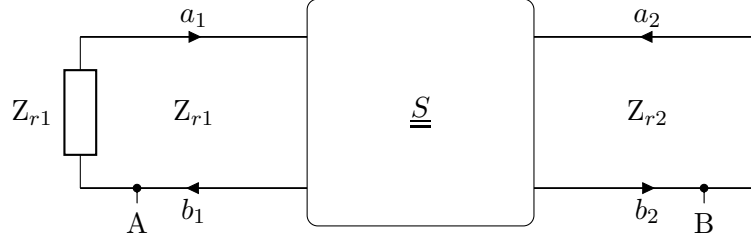


Figura 5.3: circuito con porta 1 chiusa su carico adattato

Si deduce come prima che il termine S_{22} è Γ_B in quanto rapporto tra un'onda regressiva (b_2) e un'onda progressiva (a_2) viste dalla porta 2.

3. Calcolo del coefficiente S_{12} :

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Per avere $a_1 = 0$ si chiude la porta 1 come in figura 5.3.

Se il carico è posto sulla porta 1 allora l'onda a_1 è un'onda regressiva e b_1 progressiva, per cui:

$$\Gamma_A = \frac{a_1}{b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = b_1 \Gamma_A$$

Partendo dall'equazione 5.1:

$$b_1 = S_{11}b_1\Gamma_A + S_{12}a_2 \quad \Rightarrow \quad b_1(1 - S_{11}\Gamma_A) = S_{12}a_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{b_1}{a_2} = \frac{S_{12}}{(1 - S_{11}\Gamma_A)}$$

4. Calcolo del coefficiente S_{21} :

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

In questo caso occorre chiudere la porta 2 come in figura 5.2; sapendo che:

$$\Gamma_B = \frac{a_2}{b_2} \quad \Longrightarrow \quad a_2 = b_2 \Gamma_B$$

riscriviamo la 5.2:

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}b_2\Gamma_B \quad \Rightarrow \quad b_2(1 - S_{22}\Gamma_B) = S_{21}a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_B)}$$

Esiste una formula diretta per il calcolo di Γ_A dato Γ_B ; abbiamo visto che:

$$\Gamma_A = \frac{b_1}{a_1}$$

utilizzando l'equazione 5.1 si dividono entrambi i membri per a_1 ottenendo:

$$\frac{b_1}{a_1} = S_{11} \frac{a_1}{a_1} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \Gamma_A = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1}$$

Ora spezzo il termine $\frac{a_2}{a_1}$ in questo modo:

$$\Gamma_A = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{b_2} \frac{b_2}{a_1}$$

infatti a questo punto conosciamo sia $\frac{a_2}{b_2}$ che $\frac{b_2}{a_1}$:

$$\frac{a_2}{b_2} = \Gamma_B \quad (5.3)$$

$$\frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_B)} \quad (5.4)$$

Quindi sostituendo si ha:

$$\Gamma_A = S_{11} + S_{12}\Gamma_B \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_B)} \quad (5.5)$$

Potenza

Si definisce la potenza su una porta come differenza tra onda progressiva al quadrato e onda regressiva al quadrato.

Porta 1: $P_A = |a_1|^2 - |b_1|^2$ potenza entrante in S

Porta 2: $P_B = |b_2|^2 - |a_2|^2$ potenza uscente da S

I termini b_1 e a_2 possono essere sostituiti come è stato visto con:

$$b_1 = a_1\Gamma_A$$

$$a_2 = b_2\Gamma_B$$

Quindi le due equazioni precedenti possono essere riscritte in:

$$P_A = |a_1|^2 - |b_1|^2 = |a_1|^2 - (|a_1|^2 \cdot |\Gamma_A|^2) = |a_1|^2(1 - |\Gamma_A|^2) \quad (5.6)$$

$$P_B = |b_2|^2 - |a_2|^2 = |b_2|^2 - (|b_2|^2 \cdot |\Gamma_B|^2) = |b_2|^2(1 - |\Gamma_B|^2) \quad (5.7)$$

Formule di passaggio per il calcolo della potenza.

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{|b_2|^2(1 - |\Gamma_B|^2)}{|a_1|^2(1 - |\Gamma_A|^2)}$$

Dalla 5.2 possiamo determinare $\frac{b_2}{a_1}$ dividendo ambo i membri per a_1 :

$$\frac{b_2}{a_1} = S_{21} \frac{a_1}{a_1} + S_{22} \frac{a_2}{a_1} \implies \frac{b_2}{a_1} = S_{21} + S_{22} \frac{a_2}{b_2} \frac{b_2}{a_1}$$

Il truccetto è lo stesso operato in precedenza, quindi conosciamo già i valori di $\frac{a_2}{b_2}$ e $\frac{b_2}{a_1}$ descritti nelle 5.4 e 5.4; otteniamo dunque:

$$\frac{b_2}{a_1} = S_{21} + S_{22} \Gamma_B \frac{S_{21}}{(1 - S_{22} \Gamma_B)}$$

Sostituendo si ha:

$$\frac{P_B}{P_A} = \left| S_{21} + S_{22} \Gamma_B \frac{S_{21}}{(1 - S_{22} \Gamma_B)} \right|^2 \cdot \frac{|1 - |\Gamma_B|^2|}{|1 - |\Gamma_A|^2|}$$

Per cui:

$$P_B = P_A \cdot \left| S_{21} + S_{22} \Gamma_B \frac{S_{21}}{(1 - S_{22} \Gamma_B)} \right|^2 \cdot \frac{|1 - |\Gamma_B|^2|}{|1 - |\Gamma_A|^2|} \quad (5.8)$$

5.2 Esercizi

5.2.1 Esercizio 1

Testo

Determinare l'equivalente Thevenin del circuito mostrato in figura 5.4 sapendo che:

$$R_G = 50 \Omega, \quad V_G = 3 \text{ V}_{\text{eff}},$$

$$Z_{r1} = Z_{r2} = 25 \Omega, \quad S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.15 \\ 1.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

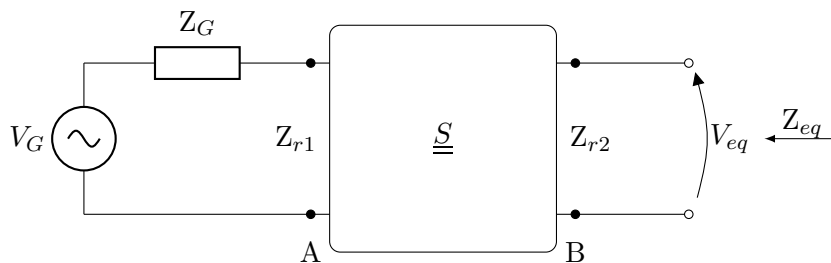


Figura 5.4: matrice scattering esercizio 1

Risoluzione

Determinare un equivalente Thevenin vuol dire calcolare tensione equivalente V_{eq} ed impedenza equivalente Z_{eq} visti dalla porta 2.

Per prima cosa calcoliamo la Z_{eq} ; bisogna spegnere il generatore V_G ottenendo un circuito di questo tipo:

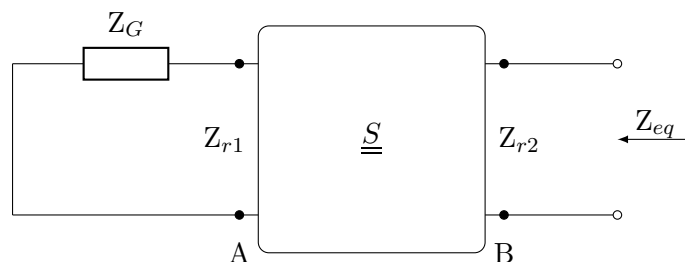


Figura 5.5: circuito per il calcolo di Z_{eq}

Calcoliamo inizialmente il valore dell'impedenza normalizzata nel punto A

e il relativo Γ_A :

$$\zeta_G = \zeta_A = \frac{R_G}{Z_{r1}} = \frac{50}{25} = 2$$

Γ_A è preferibile d'ora i poi calcolarlo mediante la formula riportata nell'equazione 1.11 anzichè ricavarlo dalla CdS per ragioni di velocità di calcolo (anche nell'esame in cui il tempo è purtroppo assai limitato):

$$\Gamma_A = \frac{\zeta_A - 1}{\zeta_A + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3} = 0.34$$

Dalla teoria sappiamo che esiste una formula di passaggio fra i Γ tra le due porte; nel nostro caso il carico è posto alla porta 1 quindi prendiamo come esempio il calcolo del coefficiente S_{12} dove:

$$\Gamma_A = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{e} \quad \frac{b_1}{a_2} = \frac{S_{12}}{(1 - S_{11}\Gamma_A)}$$

Alla porta 2 dunque Γ_B , guardando la figura 5.3, sarà dato dal rapporto tra l'onda regressiva b_2 e l'onda progressiva a_2 . Riscriviamo l'equazione 5.2 dividendo ambo i membri per a_2 :

$$\frac{b_2}{a_2} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22} \frac{a_2}{a_2} \implies \frac{b_2}{a_2} = S_{21} \frac{a_1}{b_1} \frac{b_1}{a_2} + S_{22}$$

Poichè conosciamo i due termini $\frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{b_1}{a_2}$:

$$\Gamma_B = \frac{b_2}{a_2} = S_{21}\Gamma_A \frac{S_{12}}{(1 - S_{11}\Gamma_A)} + S_{22}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\Gamma_B = \frac{1.4 \cdot 0.34 \cdot 0.15}{1 - (0.1 \cdot 0.34)} + 0.2 = 0.074 + 0.2 = 0.274$$

Dato il Γ_B con la 1.12 ricaviamo il valore di impedenza normalizzata:

$$\zeta_B = \zeta_{eq} = \frac{1 + \Gamma_B}{1 - \Gamma_B} = \frac{1 + 0.274}{1 - 0.274} = 1.75$$

$$Z_{eq} = \zeta_{eq} \cdot Z_\infty = 1.75 \cdot 25 = 43.75 \Omega$$

Calcolo di V_{eq} .

Scriviamo per prima cosa la V_{eq} come:

$$V_{eq} = V_{eq}^+(1 + \Gamma_{eq}) \implies V_B = V_B^+(1 + \Gamma_B)$$

Pensando che V_G è il generatore di corrente allora l'onda b_2 è progressiva; possiamo esplicitare V_B^+ :

$$V_B^+ = b_2 \cdot \sqrt{Z_{r2}}$$

Attenzione: nella parte introduttiva di teoria queste formule sono presenti, ma sono pensate come se ogni porta fosse collegata al generatore di tensione; per questo l'equazione riportata sopra sembra in contraddizione con quella riportata nella teoria, in realtà sono entrambe giuste.

Sappiamo che la formula di passaggio fra le onde progressive è:

$$b_2 = \frac{a_1 S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B}$$

ma a_1 onda progressiva in A è anche $\frac{V_A^+}{\sqrt{Z_{r1}}}$:

$$b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \cdot \frac{V_A^+}{\sqrt{Z_{r1}}}$$

A questo punto possiamo scrivere per $V_{eq} = V_B$:

$$V_B = (b_2 \cdot \sqrt{Z_{r2}}) \cdot (1 + \Gamma_B)$$

$$V_B = \left(\frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \cdot \frac{V_A^+}{\sqrt{Z_{r1}}} \right) \cdot \sqrt{Z_{r2}} \cdot (1 + \Gamma_B)$$

Poichè:

$$V_A = V_A^+ (1 + \Gamma_A) \implies V_A^+ = \frac{V_A}{(1 + \Gamma_A)}$$

Si ha che:

$$V_B = \left(\frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \cdot \frac{V_A}{(1 + \Gamma_A)} \right) \cdot \frac{\sqrt{Z_{r2}}}{\sqrt{Z_{r1}}} \cdot (1 + \Gamma_B)$$

Ma V_A si ricava come partitore di tensione fra le impedenze Z_A e Z_G e $Z_{r1} = Z_{r2}$, quindi:

$$V_B = \left(\frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \cdot \frac{Z_A}{Z_A + Z_G} \cdot V_G \right) \cdot \frac{(1 + \Gamma_B)}{(1 + \Gamma_A)}$$

Ora dobbiamo determinare i parametri Γ_B e Γ_A perchè non si possono utilizzare quelli calcolati per la Z_{eq} :

- . per Γ_B è facile, in quanto essendo il circuito aperto in B l'impedenza sarà infinita e dunque $\Gamma_B = 1$;
- . conoscendo Γ_B con la formula di passaggio 5.5 ricaviamo:

$$\Gamma_A = S_{11} + S_{12} \Gamma_B \frac{S_{21}}{(1 - S_{22} \Gamma_B)} = 0.363$$

- . con Γ_A possiamo determinare grazie a 1.12 il valore di $\zeta_A = 2.18$ e di conseguenza $Z_A = \zeta_A \cdot Z_{r1} = 54.5 \Omega$.

A questo punto abbiamo tutti i valori numerici da sostituire:

$$V_B = \left(\frac{1.4}{1 - 0.2 \cdot 1} \cdot \frac{54.5}{54.5 + 50} \cdot 3 \right) \cdot \frac{(1 + 1)}{(1 + 0.363)} =$$

$$= (1.75 \cdot 0.523 \cdot 3) \cdot 1.467 = 4.03 \text{ V}_{\text{eff}}$$

5.2.2 Esercizio 2

Testo

Determinare la potenza incidente sul carico e la potenza dissipata dal dispositivo scattering del circuito mostrato in figura 5.6 sapendo che:

$$\begin{aligned} Z_G &= 50 \Omega, & V_G &= 100 \text{ V}_{\text{eff}}, & Z_L &= (50 + j50) \Omega, \\ Z_{r1} &= Z_{r2} = 50 \Omega, & S &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5j \\ 0.5j & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

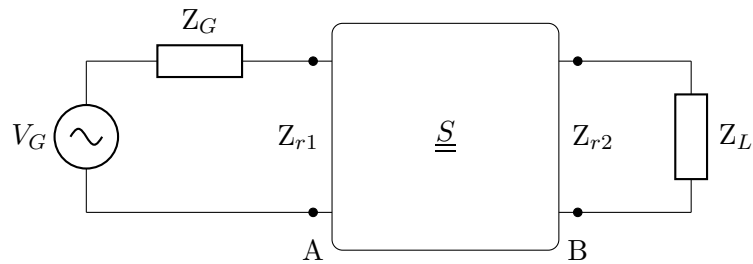


Figura 5.6: matrice scattering esercizio 2

Risoluzione

Una proprietà importantissima della matrice scattering è la seguente:

$$\begin{cases} S \cdot S^{T*} = I & \text{il dispositivo non dissipa potenza} \\ S \cdot S^{T*} = R \neq I & \text{se } |aut\{R\}| < 1 \text{ il dispositivo dissipa potenza} \\ S \cdot S^{T*} = R \neq I & \text{se } |aut\{R\}| > 1 \text{ il dispositivo "guadagna" potenza} \end{cases}$$

Verifichiamo nel nostro caso:

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5j \\ 0.5j & 0.5 \end{pmatrix} & S^{T*} &= \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5j \\ -0.5j & 0.5 \end{pmatrix} \\ S \cdot S^{T*} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il dispositivo quindi dissipa una potenza che chiameremo P_{diss} .

Per la 5.8 sappiamo che:

$$P_B = P_A \cdot \left| \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_B)} \right|^2 \cdot \frac{|1 - |\Gamma_B|^2|}{|1 - |\Gamma_A|^2|}$$

ma $P_B = P_L$; la potenza che arriva sul carico sarà sicuramente minore della potenza erogata dal generatore e minore della potenza misurabile nel tratto

A.

$$P_L = P_A - P_{\text{diss}}$$

Calcolando dunque P_L e P_A riusciremo a determinare anche P_{diss} .

Ricaviamo il valore di Γ_B partendo da ζ_B , riportandolo nel punto A potremo ricavare ζ_A e Γ_A utile per ottenere P_A .

$$\zeta_B = \frac{Z_L}{Z_{r2}} = \frac{(50 + j50)}{50} = (1 + j)$$

$$\Gamma_B = \frac{\zeta_B - 1}{\zeta_B + 1} = \frac{(1 + j) - 1}{(1 + j) + 1} = \frac{j}{2 + j} = (0.2 + j0.4)$$

Grazie alla formula di passaggio 5.5:

$$\Gamma_A = S_{11} + S_{12}\Gamma_B \frac{S_{21}}{(1 - S_{22}\Gamma_B)}$$

Determiniamo il valore di Γ_A sostituendo i valori numerici:

$$\Gamma_A = 0.5 + j0.5 \cdot (0.2 + j0.4) \frac{j0.5}{1 - 0.5 \cdot (0.2 + j0.4)} = (0.47 - j0.12)$$

Da cui:

$$\zeta_A = \frac{1 + \Gamma_A}{1 - \Gamma_A} = \frac{1 + (0.47 - j0.12)}{1 - (0.47 - j0.12)} = (2.6 - j1.6)$$

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_{r1} = (2.6 - j1.6) \cdot 50 = (130 - j40) \Omega$$

La potenza nel punto A si può calcolare mediante la 2.7:

$$\kappa_\Gamma = \frac{Z_A - Z_G^*}{Z_A + Z_G} = \frac{(130 - j40) - 50}{(130 - j40) + 50} = (0.47 - j0.118)$$

Siccome serve solo il $|\kappa_\Gamma|$:

$$|\kappa_\Gamma| = |(0.47 - j0.118)| = 0.48$$

$$P_{\text{disp}} = \frac{|V_G|^2}{4 \cdot \text{Re}\{Z_G\}} = \frac{100^2}{4 \cdot 50} = 50 \text{ W}$$

$$P_A = P_{\text{disp}} \cdot [1 - |\kappa_\Gamma|^2] = 50 \cdot [1 - 0.48^2] = 50 \cdot [1 - 0.23] = 38.5 \text{ W}$$

Conoscendo P_A possiamo finalmente determinare P_L sostituendo i valori numerici:

$$P_B = 38.5 \cdot \left| \frac{j0.5}{(1 - 0.5 \cdot (0.47 - j0.118))} \right|^2 \cdot \frac{|1 - |0.48|^2|}{|1 - |0.49|^2|} = 16.57 \text{ W}$$

$$P_{\text{diss}} = P_A - P_L = 38.5 - 16.57 = 21.93 \text{ W}$$

Capitolo 6

Esercizi completi

In questi esercizi si riportano solo i passaggi fondamentali. In questa fase è opportuno avere già chiaro come procedere nella risoluzione.

6.1 Teoria

Formula del partitore di potenza

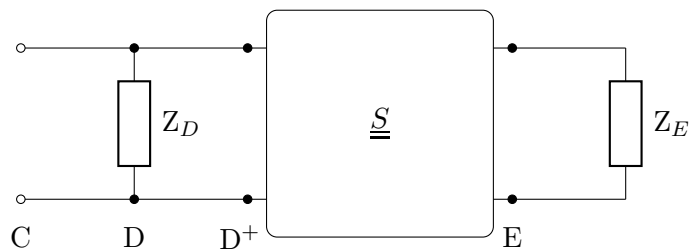


Figura 6.1: esempio di linea in cui applicare il partitore di potenza

La potenza viene ripartita su D ed D^+ in questo modo:

$$P_D = \frac{\mathbf{Re}\{y_D\}}{\mathbf{Re}\{Y_{D^+}\} + \mathbf{Re}\{y_D\}} \cdot P_C$$

$$P_{D^+} = \frac{\mathbf{Re}\{Y_{D^+}\}}{\mathbf{Re}\{Y_{D^+}\} + \mathbf{Re}\{y_D\}} \cdot P_C$$

Poi con la formula di passaggio di potenza 5.8 si può calcolare la potenza assorbita nel punto E.

6.2 Esercizi

6.2.1 Esercizio 1

Testo

Considerando la linea di trasmissione in figura 6.2, si progetti un adattatore che assicuri che tutta la potenza incidente venga trasferita ai carichi. La configurazione dell'adattatore (diritto o rovescio) deve essere scelta in modo tale che la lunghezza della linea \overline{BC} sia minima. Minimizzare di conseguenza anche la lunghezza dello stub, terminandolo opportunamente con un circuito aperto o un cortocircuito. Calcolare infine la potenza assorbita dai carichi Z_P e Z_L .

$$\begin{aligned} Z_G &= (50 + j50) \Omega, & Z_L &= 130 \Omega, & Z_P &= (10 + j15) \Omega, \\ Z_{\infty 1} &= 100 \Omega, & Z_{\infty 2} &= 50 \Omega, & Z_{r1} &= Z_{r2} = 100 \Omega, \\ V_G &= 20 V_{\text{eff}}, & \overline{AB} &= 1.5 \text{ m}, & \alpha|_{\text{dB}} &= 0.4 \text{ dB/m}, \\ \lambda &= 30 \text{ cm}, & S &= \begin{pmatrix} 0.5 & j0.5 \\ j0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

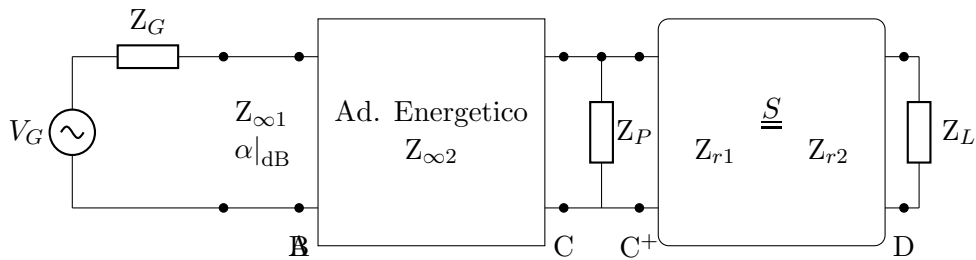


Figura 6.2: esercizi completi 1

Risoluzione

. Determino:

$$\zeta_D = \zeta_L \frac{Z_L}{Z_{r2}} = \frac{130}{100} = 1.3$$

. Con la formula 1.11:

$$|\Gamma_D| = 0.13 \qquad \angle \Gamma_D = 0$$

. Utilizzando i parametri della matrice scattering ricavo $|\Gamma_C^+|$ da $|\Gamma_D|$ con la formula 5.5:

$$\Gamma_C^+ = S_{11} + S_{12} \Gamma_D \frac{S_{21}}{(1 - S_{22} \Gamma_D)}$$

. Sostituendo i valori numerici:

$$\Gamma_C^+ = \frac{1}{2} + \frac{j0.13}{2} \cdot \frac{j0.5}{1 - (0.5 \cdot 0.13)} = 0.5 - 0.035 = 0.465$$

. Conoscendo Γ_C^+ ricavo con la 1.12:

$$\zeta_{C^+} = 2.8 \qquad y_{C^+} = 0.38$$

$$Y_{C^+} = \frac{y_{C^+}}{Z_{r1}} = \frac{0.38}{100} = 0.0038 \text{ S}$$

. Per quanto riguarda l'impedenza Z_P :

$$\zeta_P = \frac{Z_P}{Z_{r1}} = \frac{(10 + j15)}{100} = (0.1 + j0.15)$$

$$y_P = (3 - j4.6)$$

$$Y_P = \frac{y_P}{Z_{r1}} = \frac{(3 - j4.6)}{100} = (0.03 - j0.046) \text{ S}$$

. Nel punto ($-C$):

$$Y_{(-C)} = Y_{C^+} + Y_P$$

$$Y_{(-C)} = 0.0038 + (0.03 - j0.046) = (0.0338 - j0.046) \text{ S}$$

$$y_{(-C)} = Y_{(-C)} \cdot Z_{\infty 2} = (0.0338 - j0.046) \cdot 50 = (1.69 - j2.3)$$

$$\zeta_{(-C)} = (0.21 + j0.29)$$

$$|\Gamma_{(-C)}| = \frac{|\zeta_{(-C)} - 1|}{|\zeta_{(-C)} + 1|} = \frac{|(0.21 + j0.29) - 1|}{|(0.21 + j0.29) + 1|} = 0.676$$

. Progetto adattatore di uniformità L diritto

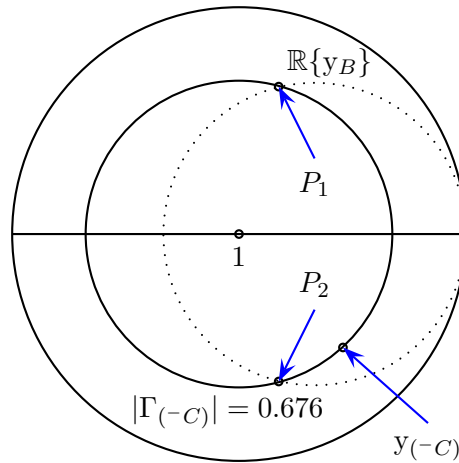
_ Normalizzo l'adattatore alla linea:

$$y_B = \frac{Z_{\infty 2}}{Z_{\infty 1}} = \frac{50}{100} = 0.5$$

_ Dalla CdS ricavo (in questo caso non ho impedenza quindi non uso la 1.11):

$$|\Gamma_B| = 0.325$$

_ Sulla CdS cerco l'intersezione fra il cerchio a $|\Gamma_{(-C)}|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_B\}$ (disegnato con tratto a punti):



_ Si ottengono due intersezioni P_1 e P_2 :

$$\begin{cases} P_1 = y_{B+} = (0.5 + j1.2) \\ P_2 = y_{B+} = (0.5 - j1.2) \end{cases}$$

_ Ricaviamo y_{stub} come:

$$y_{stub} = y_B - y_{B+}$$

$$\begin{cases} y_{stub} = 0.5 - (0.5 + j1.2) = -j1.2 \text{ con il punto } P_1 \\ y_{stub} = 0.5 - (0.5 - j1.2) = j1.2 \text{ con il punto } P_2 \end{cases}$$

_ Dalla CdS si vede che il punto P_2 minimizza la linea.

_ Calcolo della lunghezza del tratto \overline{BC} :

$$\frac{\overline{BC}}{\lambda} = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_{P_2} + \left. \frac{l}{\lambda} \right|_{(-C)} = 0.351 - 0.316 = 0.035$$

$$\overline{CD} = 0.035 \cdot \lambda = 0.035 \cdot 0.3 = 0.0105 \text{ m} = 1.05 \text{ cm}$$

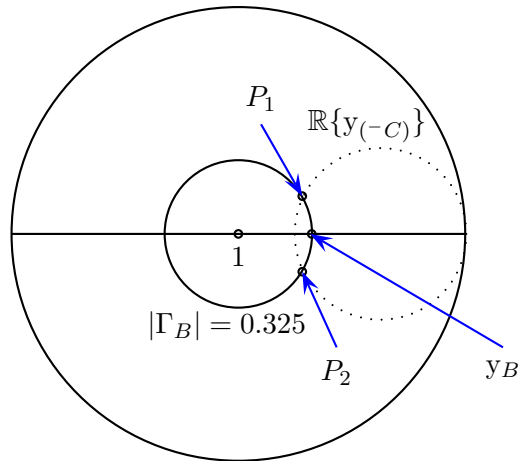
_ Calcolo della lunghezza dello stub; deve essere minima quindi girando toward generator incontro il circuito aperto in ammettenza:

$$\frac{stub}{\lambda} = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_{stub} - \left. \frac{l}{\lambda} \right|_{Circuito\ aperto} = 0.14 - 0 = 0.14$$

$$stub = 0.14 \cdot \lambda = 0.14 \cdot 0.3 = 0.042 \text{ m} = 4.2 \text{ cm}$$

. Progetto adattatore di uniformità L rovescio

_ Verifico sulla CdS che il cerchio a $|\Gamma_B|$ costante (disegnato con tratto continuo) e il cerchio $\mathbb{R}\{y_{(-C)}\}$ (disegnato con tratto a punti) abbiano intersezioni:



_ Si ottengono due intersezioni P_1 e P_2 :

$$\begin{cases} P_1 = y_{\overline{BC}}^{(-C)} = (1.69 + j0.65) \\ P_2 = y_{\overline{BC}}^{(-C)} = (1.69 - j0.65) \end{cases}$$

_ Nel punto $^{-C}$ si ha un'ammettenza $y_{(-C)}$ pari a:

$$y_{(-C)} = y_{\overline{BC}}^{(-C)} - y_{stub}$$

_ Ricavo dunque y_{stub} come:

$$y_{stub} = y_{\overline{BC}}^{(-C)} - y_{(-C)}$$

_ Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{cases} y_{stub} = (1.69 + j0.65) - (1.69 - j2.3) = j2.95 \text{ con il punto } P_1 \\ y_{stub} = (1.69 - j0.65) - (1.69 - j2.3) = j1.65 \text{ con il punto } P_2 \end{cases}$$

_ Dalla CdS si vede che il punto P_1 minimizza la linea.
 _ Calcolo della lunghezza del tratto \overline{BC} :

$$\frac{\overline{BC}}{\lambda} = \left. \frac{l}{\lambda} \right|_{P_1} + \left. \frac{l}{\lambda} \right|_B = 0.294 - 0.25 = 0.044$$

$$\overline{BC} = 0.044 \cdot \lambda = 0.044 \cdot 0.3 = 0.132 \text{ m} = 1.32 \text{ cm}$$

– Siccome $1.32 > 1.05$ si sceglie l'adattatore L diritto per minimizzare la lunghezza della linea.

– Non è quindi più il caso di calcolare la lunghezza dello stub per l'adattatore L rovescio.

. Calcolo della potenza

. La potenza nel punto A:

$$P_A = P_{\text{disp}} \cdot [1 - |\Gamma|^2]$$

. Determino dunque Z_A per il calcolo di $|\Gamma|$

– Il tratto di linea \overline{AB} ha perdite:

$$A_{\text{dB}} = \alpha_{\text{dB}} \cdot \overline{AB} = 0.4 \cdot 1.5 = 0.6 \text{ dB}$$

$$A_n = 10^{-\frac{0.6}{10}} = 0.871$$

$$|\Gamma_A| = |\Gamma_B| \cdot A_n = 0.325 \cdot 0.871 = 0.283$$

– Con la formula 1.12 ricavo:

$$\zeta_A = 0.55$$

$$Z_A = \zeta_A \cdot Z_{\infty 1} = 0.55 \cdot 100 = 55 \Omega$$

. Con la 2.7 calcolo:

$$|\Gamma| = \frac{|55 - (50 - j50)|}{|55 + (50 + j50)|} = \frac{|5 + j50|}{|105 + j50|} = \frac{50.25}{116.25} = 0.43$$

. Ora calcolo la P_{disp} :

$$P_{\text{disp}} = \frac{|V_G|^2}{4 \cdot \text{Re}\{Z_G\}} = \frac{20^2}{4 \cdot 50} = 2 \text{ W}$$

. Con tutti i parametri determino P_A :

$$P_A = 2 \cdot [1 - |\Gamma|^2] = 2 \cdot 0.815 = 2 \cdot [1 - 0.43^2] = 1.63 \text{ W}$$

. Nel punto B invece:

$$P_B = P_A \cdot A_n = 1.63 \cdot 0.871 = 1.42 \text{ W}$$

. $P_{(-C)} = P_B$; in ^-C la $P_{(-C)}$ si ripartisce fra Z_P e il punto C^+ :

$$P_P = \frac{\text{Re}\{Y_P\}}{\text{Re}\{Y_{C^+}\} + \text{Re}\{Y_P\}} \cdot P_{(-C)} = \frac{0.03}{0.0038 + 0.03} \cdot 1.42 = 1.261 \text{ W}$$

$$P_{C^+} = \frac{\mathbf{Re}\{Y_{C^+}\}}{\mathbf{Re}\{Y_{C^+}\} + \mathbf{Re}\{Y_P\}} \cdot P_{(-C)} = \frac{0.0038}{0.0038 + 0.03} \cdot 1.42 = 0.159 \text{ W}$$

. Con la 5.8 calcolo P_D :

$$P_D = P_{C^+} \cdot \left| S_{21} + S_{22} \Gamma_D \frac{S_{21}}{(1 - S_{22} \Gamma_D)} \right|^2 \cdot \frac{|1 - |\Gamma_D|^2|}{|1 - |\Gamma_{C^+}|^2|}$$

$$P_D = 0.159 \cdot \left| \frac{j}{2} + \frac{0.13}{2} \frac{j/2}{1 - 1/2 \cdot 0.13} \right|^2 \cdot \frac{|1 - |0.13|^2|}{|1 - |0.465|^2|} =$$

$$= 0.159 \cdot 0.216 \cdot 1.254 = 0.043 \text{ W}$$

Parte II

Linee nel dominio del tempo

Capitolo 7

Teoria

Gli esercizi di questa sezione prevedono che, data una linea di trasmissione, si diagrammi l'andamento di tensione o corrente nel dominio del tempo. Il concetto fondamentale da capire è che la tensione su una linea si comporta come una pallina da ping pong: viene *riflessa* dal carico vero e proprio verso il generatore e dall'impedenza interna del generatore verso il carico. Questo comportamento prende il nome di **propagazione delle riflessioni multiple**. Per analizzarlo occorre introdurre una nuova grandezza:

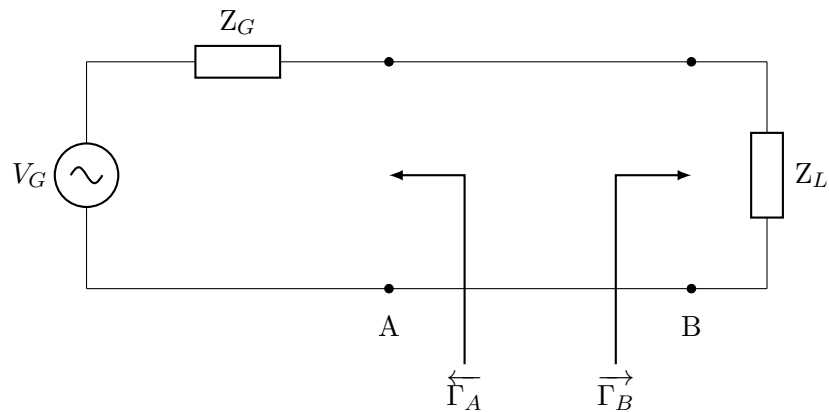


Figura 7.1: linea di trasmissione analizzata nel dominio del tempo

Come si vede in figura abbiamo evidenziato la presenza di due Γ :

- . Γ_B è quello che abbiamo già studiato: il coefficiente di riflessione del carico che ora indicheremo come $\overrightarrow{\Gamma}_B$;
- . Γ_A è la nuova grandezza: il coefficiente di riflessione del carico interno; per evitare confusione sarà indicata con $\overleftarrow{\Gamma}_A$.

Le frecce servono a ricordare dove avviene la riflessione; negli esercizi affrontati si effettua una notevole semplificazione: il generatore ha una resistenza interna e non un'impedenza.

Definizione:

$$\overleftarrow{\Gamma}_A = \frac{R_G - Z_\infty}{R_G + Z_\infty}$$

Le riflessioni sono multiple quindi il *rimbalzo* sulla linea avviene più volte; è possibile riuscire a quantificare le ampiezze delle onde riflesse attraverso gli sviluppi di Taylor:

$$V_B = V_G \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_A}{2} \cdot (1 + \overrightarrow{\Gamma}_B) \cdot \left[e^{-jk\overline{AB}} + \left(\overleftarrow{\Gamma}_A \overrightarrow{\Gamma}_B \right) e^{-jk\overline{AB}} + \left(\overleftarrow{\Gamma}_A \overrightarrow{\Gamma}_B \right)^2 e^{-jk\overline{AB}} + \dots \right]$$

Se invece volevo diagrammare V_A :

$$V_A = V_G \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_A}{2} \cdot (1 + \overleftarrow{\Gamma}_A) \cdot \left[e^{-jk\overline{AB}} + \left(\overleftarrow{\Gamma}_A \overrightarrow{\Gamma}_B \right) e^{-jk\overline{AB}} + \left(\overleftarrow{\Gamma}_A \overrightarrow{\Gamma}_B \right)^2 e^{-jk\overline{AB}} + \dots \right]$$

Il termine $\frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_A}{2}$ può anche essere riscritto in altro modo:

$$\frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_A}{2} = \frac{1 - \frac{R_G - Z_\infty}{R_G + Z_\infty}}{2} = \frac{2 \cdot Z_\infty}{2(R_G + Z_\infty)} = \frac{Z_\infty}{R_G + Z_\infty}$$

Si definisce:

$$\tau = \frac{\overline{AB}}{V_f}$$

ritardo di linea ovvero ogni quanto tempo avviene la riflessione.

Capitolo 8

Esercizi

8.1 Esercizio 1

Testo

Determinare $v_A(t)$ per $0 < t < 120$ ns data la linea di trasmissione in figura 8.1 .

$$\begin{aligned} R_G &= 50 \Omega, & Z_\infty &= 50 \Omega, & Z_{\infty 1} &= 300 \Omega, \\ V_G(t) &= p_{3\tau}(t) \cdot V_0, & V_0 &= 1 \text{ V}_{\text{eff}}, & V_f &= 2.4 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \\ \overline{AB} &= 9.6 \text{ m} \end{aligned}$$

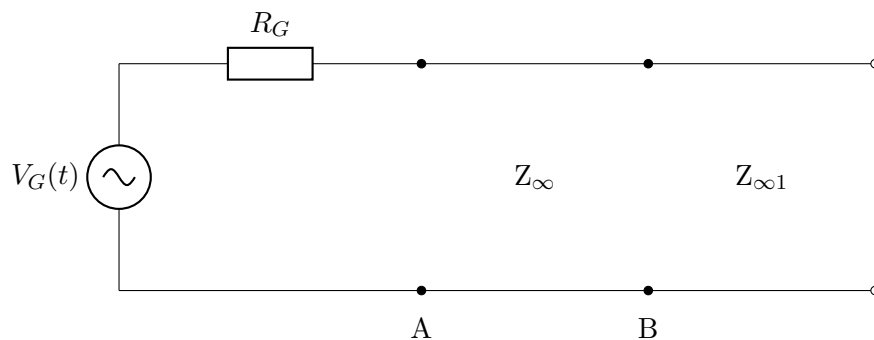
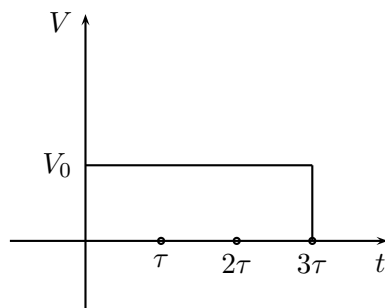


Figura 8.1: linee nel dominio del tempo esercizio 1

Grafico di $V_g(t)$:



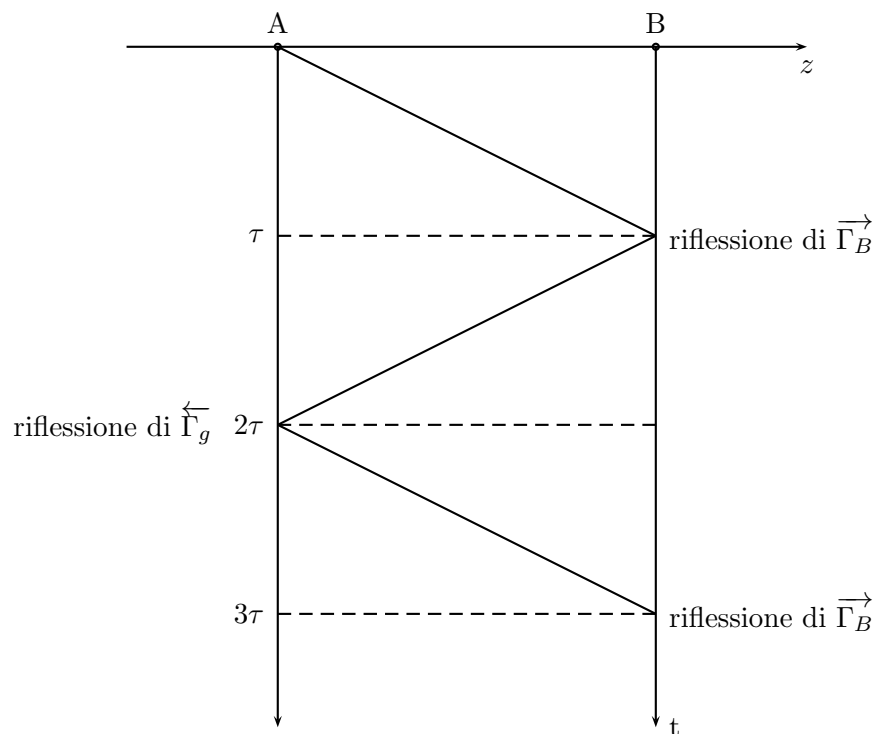
Risoluzione

Calcoliamo inanzi tutto:

$$\tau = \frac{\overline{AB}}{V_f} = \frac{9.6}{2.4 \cdot 10^8} = 40 \text{ ns}$$

Si deduce quindi che dobbiamo graficare $v_A(t)$ per 3τ .

Diagramma a traliccio:



Nel punto A la tensione è data da due contributi: quello iniziale e uno in corrispondenza di 2τ .

1. $v_A(t)$ in $t = 0$:

$$V_g(t) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} = V_0 \cdot p_{3\tau}(t) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2}$$

calcoliamo dunque $\overleftarrow{\Gamma}_g$:

$$\overleftarrow{\Gamma}_g = \frac{R_G - Z_\infty}{R_G + Z_\infty} \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0$$

perciò:

$$v_{A_0} = p_{3\tau}(t) \cdot V_0 \cdot \frac{1}{2} = 0.5 \cdot p_{3\tau}(t)$$

2. $v_A(t)$ in $t = 2\tau$ è stata riflessa una volta da $\overrightarrow{\Gamma}_B$:
 . componente progressiva di $v_{A_{2\tau}}$:

$$V_g(t - 2\tau) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B = V_0 \cdot p_{3\tau}(t - 2\tau) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B$$

. calcoliamo $\overrightarrow{\Gamma}_B$:

$$\overrightarrow{\Gamma}_B = \frac{Z_{\infty 1} - Z_\infty}{Z_{\infty 1} + Z_\infty} = 0.714$$

. si usa $Z_{\infty 1}$ perchè la linea dopo B è infinita quindi è come avere un carico di valore $Z_{\infty 1}$.

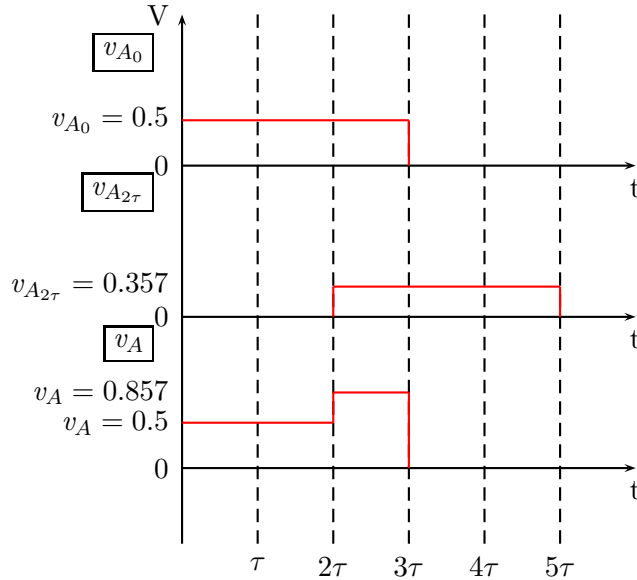
. per avere la tensione totale si moltiplica la tensione progressiva per $(1 + \overleftarrow{\Gamma}_g)$:

$$v_{A_{2\tau}} = V_0 \cdot p_{3\tau}(t - 2\tau) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B \cdot (1 + \overleftarrow{\Gamma}_g)$$

. sostituendo i valori numerici:

$$v_{A_{2\tau}} = p_{3\tau}(t - 2\tau) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.714 \cdot (1 - 0) = 0.357 \cdot p_{3\tau}(t - 2\tau)$$

Vediamo su un grafico generale l'andamento di $v_A(t)$:



Il diagramma totale deve essere presente solo per 3τ altrimenti si viola la condizione dell'esercizio per cui $0 < t < 120$ ns.

8.2 Esercizio 2

Testo

Si diagrammi la tensione $v_C(t)$ per $0 < t < 10$ ns della linea di trasmissione in figura 8.2.

$$\frac{Z_{\infty 1}}{AB} = 3 \cdot Z_{\infty}, \quad \frac{Z_{\infty 2}}{BC} = 2 \cdot Z_{\infty}, \quad V_f = 2.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \\ V_0 = 1 \text{ V}$$

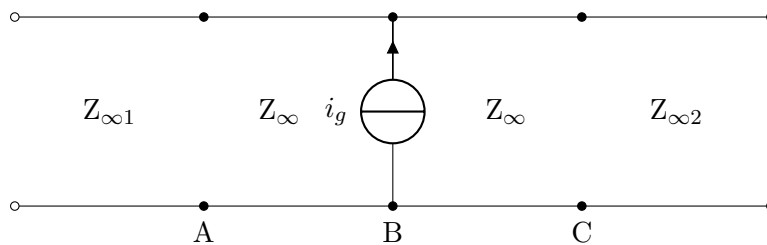
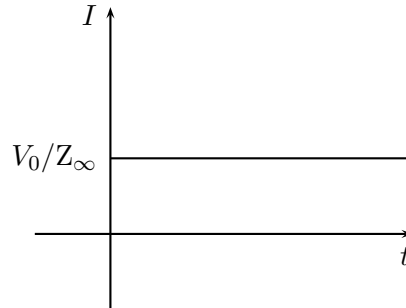


Figura 8.2: linee nel dominio del tempo esercizio 2

Grafico di $i_g(t)$:



Risoluzione

In questa linea abbiamo due τ diversi; indichiamo con τ_A il ritardo di linea del tratto \overline{AB} e con τ_C il ritardo del tratto \overline{BC} .

$$\tau_A = \frac{\overline{AB}}{V_f} = \frac{0.5}{2.5 \cdot 10^8} = 2 \text{ ns}$$

$$\tau_C = \frac{\overline{BC}}{V_f} = \frac{0.25}{2.5 \cdot 10^8} = 1 \text{ ns}$$

Sulla linea di trasmissione inizialmente, per $t = 0$ avremo:

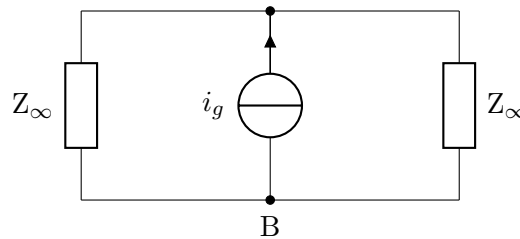


Figura 8.3: linea di trasmissione per $t = 0$

$$v_{B_0}(t) = i_g(t) \cdot \frac{Z_\infty}{2} = \frac{V_0}{Z_\infty} \cdot u(t) \cdot \frac{Z_\infty}{2} = 0.5 \cdot u(t)$$

La tensione $v_{B_0}(t)$ si propaga contemporaneamente da B a C in 1 ns e da B ad A in 2 ns prima di essere riflessa.

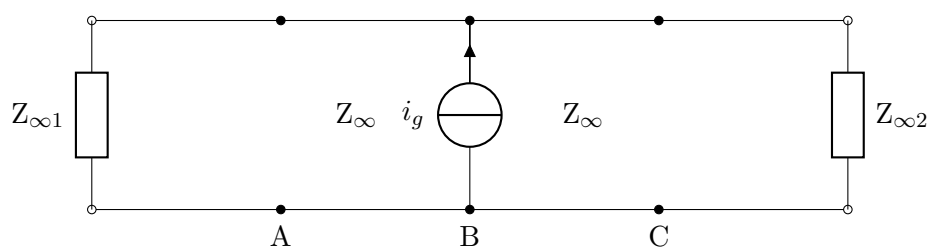
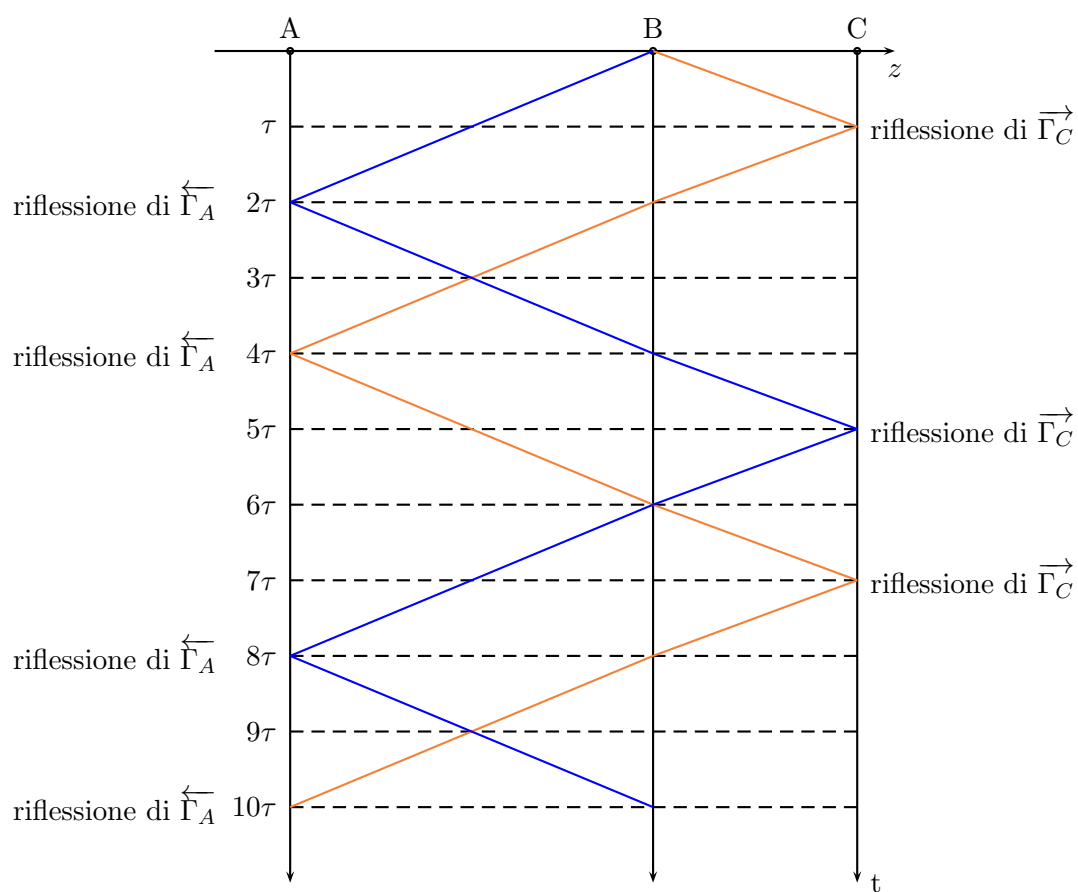


Figura 8.4: linea di trasmissione per t generico

Diagramma a traliccio:



La tensione $v_C(t)$ è, come si vede formata da 3 contributi.

Calcoliamo prima però $\overleftarrow{\Gamma}_A$ e $\overrightarrow{\Gamma}_C$.

$$\overleftarrow{\Gamma}_A = \frac{Z_{\infty 1} - Z_{\infty}}{Z_{\infty 1} + Z_{\infty}} = \frac{3Z_{\infty} - Z_{\infty}}{3Z_{\infty} + Z_{\infty}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_C = \frac{Z_{\infty 2} - Z_{\infty}}{Z_{\infty 2} + Z_{\infty}} = \frac{2Z_{\infty} - Z_{\infty}}{2Z_{\infty} + Z_{\infty}} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Determiniamo ora i valori di $v_C(t)$:

1. per $t = 0$:

. tensione progressiva:

$$v_{B_0}(t - \tau)$$

. per avere tensione totale multiplico per $(1 + \overrightarrow{\Gamma}_C)$:

$$v_{C_0} = v_{B_0}(t - \tau) \cdot (1 + \overrightarrow{\Gamma}_C) = 0.5 \cdot u(t - \tau) \cdot (1 + \overrightarrow{\Gamma}_C) = 0.667 \cdot u(t - \tau)$$

2. per $t = 5\tau$ si guarda la retta blu sul diagramma a traliccio; è stata riflessa una volta in corrispondenza di $t = 2\tau$ da $\overleftarrow{\Gamma}_A$:

. tensione progressiva:

$$v_{B_0}(t - 5\tau) \cdot \overleftarrow{\Gamma}_A$$

. per avere tensione totale multiplico per $(1 + \overrightarrow{\Gamma}_C)$:

$$v_{C_{5\tau}} = v_{B_0}(t - 5\tau) \cdot \overleftarrow{\Gamma}_A (1 + \overrightarrow{\Gamma}_C) = 0.333 \cdot u(t - 5\tau)$$

3. per $t = 7\tau$ si guarda la retta arancione sul diagramma a traliccio; è stata riflessa in corrispondenza di $t = \tau$ da $\overrightarrow{\Gamma}_C$ e in corrispondenza di $t = 4\tau$ da $\overleftarrow{\Gamma}_A$:

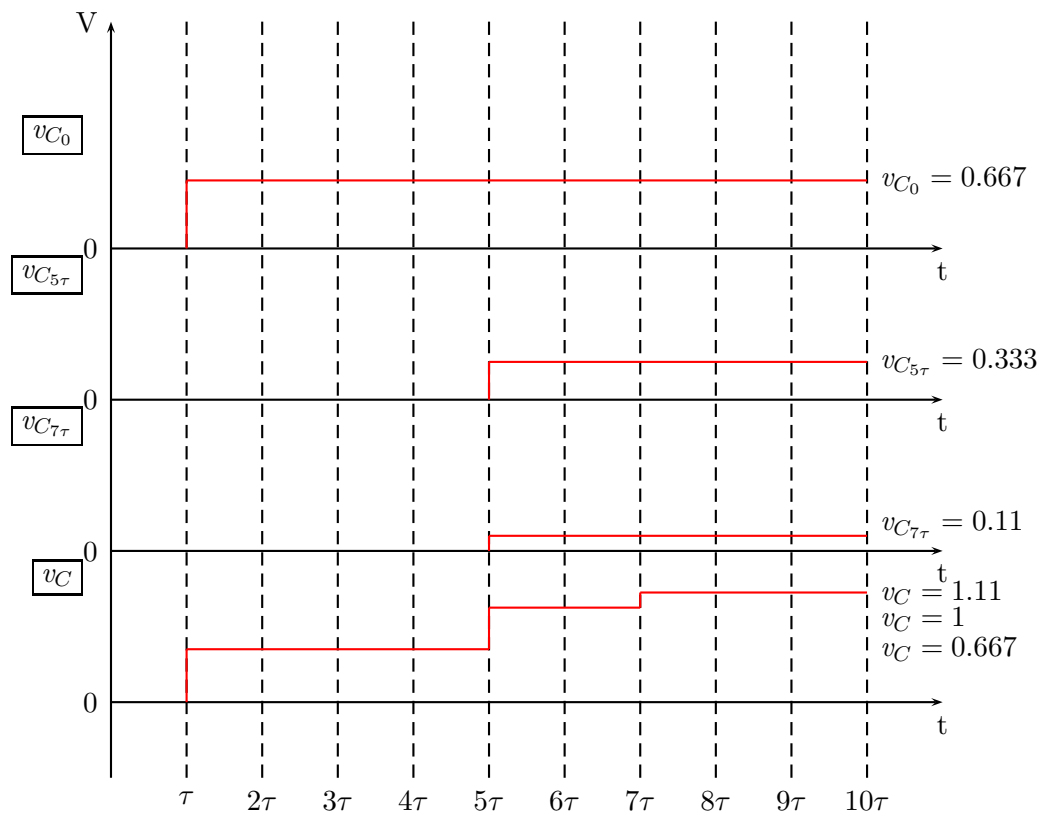
. tensione progressiva:

$$v_{B_0}(t - 7\tau) \cdot \overleftarrow{\Gamma}_A \cdot \overrightarrow{\Gamma}_C$$

. per avere tensione totale multiplico per $(1 + \overrightarrow{\Gamma}_C)$:

$$v_{C_{7\tau}} = v_{B_0}(t - 7\tau) \cdot \overleftarrow{\Gamma}_A \cdot \overrightarrow{\Gamma}_C \cdot (1 + \overrightarrow{\Gamma}_C) = 0.11 \cdot u(t - 7\tau)$$

Diagramma di $v_C(t)$ per $0 < t < 10 \text{ ns}$:



8.3 Esercizio 3

Testo

Si diagrammi la tensione $v_z(t)$ per $t = 8 \text{ ns}$ della linea di trasmissione in figura 8.5.

$$\begin{aligned} R_G &= 100 \Omega, & R_L &= 20 \Omega, & Z_\infty &= 75 \Omega, \\ \overline{AB} &= 1 \text{ m}, & V_f &= 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} & V_0 &= 1 \text{ V} \end{aligned}$$

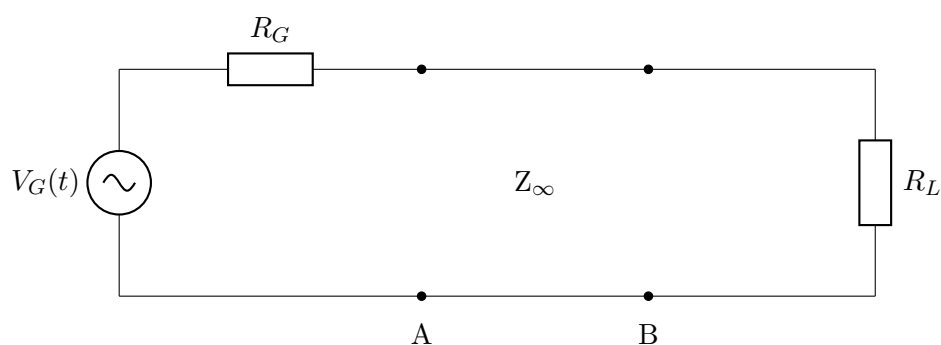
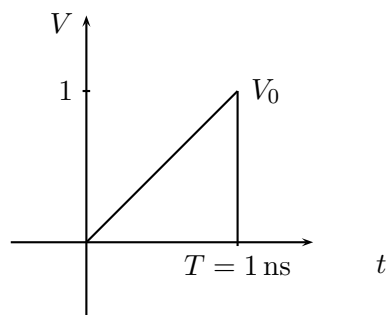


Figura 8.5: linee nel dominio del tempo esercizio 3



Risoluzione

Come al solito si calcola per prima cosa:

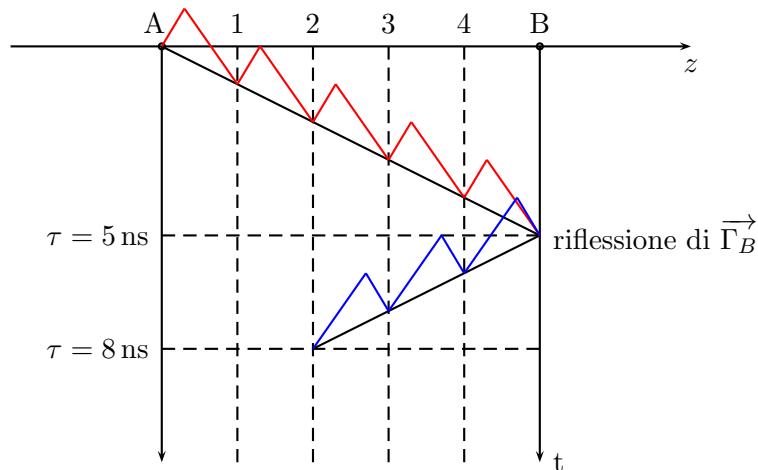
$$\tau = \frac{\overline{AB}}{V_f} = \frac{1}{2 \cdot 10^8} = 5 \text{ ns}$$

Procediamo ora con il calcolo di $\overleftarrow{\Gamma}_g$ e $\overrightarrow{\Gamma}_B$:

$$\overleftarrow{\Gamma}_g = \frac{R_G - Z_\infty}{R_G + Z_\infty} = \frac{100 - 75}{100 + 75} = 0.143$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_B = \frac{R_L - Z_\infty}{R_L + Z_\infty} = \frac{20 - 75}{20 + 75} = -0.579$$

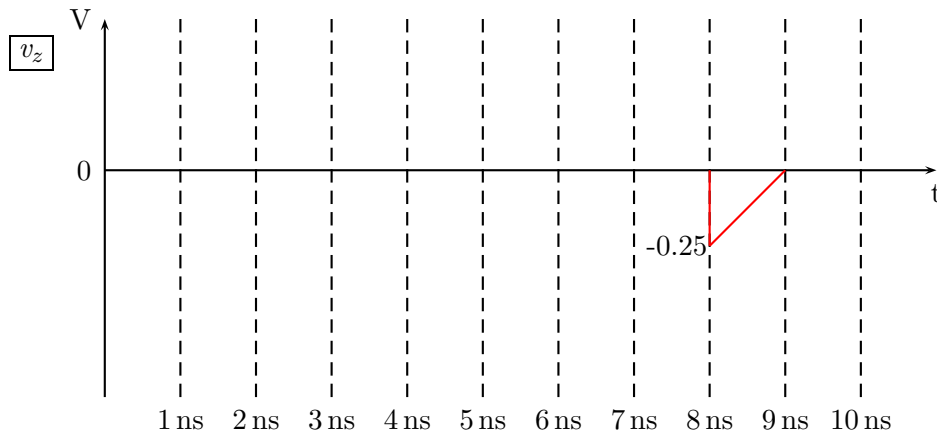
Diagramma a traliccio:



Dopo $t = 8 \text{ ns}$, come si vede nel diagramma a traliccio, la tensione è stata riflessa da $\overleftarrow{\Gamma}_g$ (triangolo di colore blu).

$$\begin{aligned} v_z(t - 8 \text{ ns}) &= V_G(t - 8 \text{ ns}) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B = \\ &= V_0 \cdot t_T(t - 8 \text{ ns}) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B = t_T(t - 8 \text{ ns}) \cdot \frac{1 - 0.143}{2} \cdot (-0.579) = -0.25 \cdot t_T(t - 8 \text{ ns}) \end{aligned}$$

Diagramma di $v_z(t)$ per $t = 8 \text{ ns}$:



8.4 Esercizio 4

Testo

Si diagrammi la tensione $v_m(t)$ per $0 < t < 8 \text{ ns}$ della linea di trasmissione in figura 8.6.

$$\begin{array}{lll} R_G = 25 \Omega, & R_L = 75 \Omega, & Z_\infty = 50 \Omega, \\ \overline{AB} = 400 \text{ m}, & \overline{AM} = 200 \text{ m} & \epsilon_r = 2.25 \end{array}$$

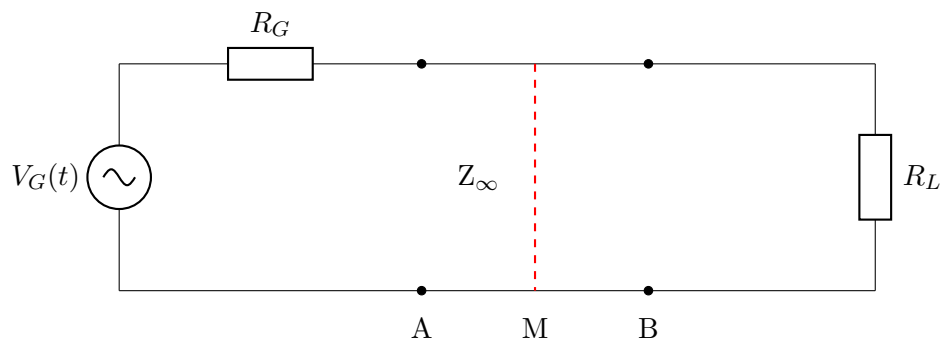
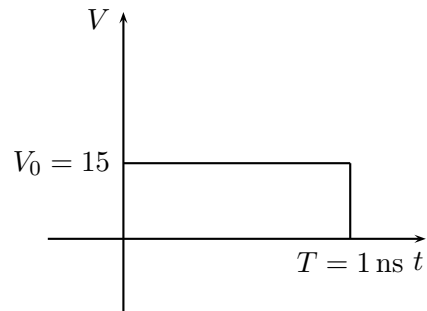


Figura 8.6: linee nel dominio del tempo esercizio 4

Grafico di $V_g(t)$:



Risoluzione

Determiniamo la velocità di fase:

$$V_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2.25}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Calcoliamo ora la costante di tempo per il tratto di linea \overline{AB} :

$$\tau = \frac{\overline{AB}}{V_f} = \frac{400}{2 \cdot 10^8} = 2 \mu s$$

Nel punto M della linea la costante di tempo sarà:

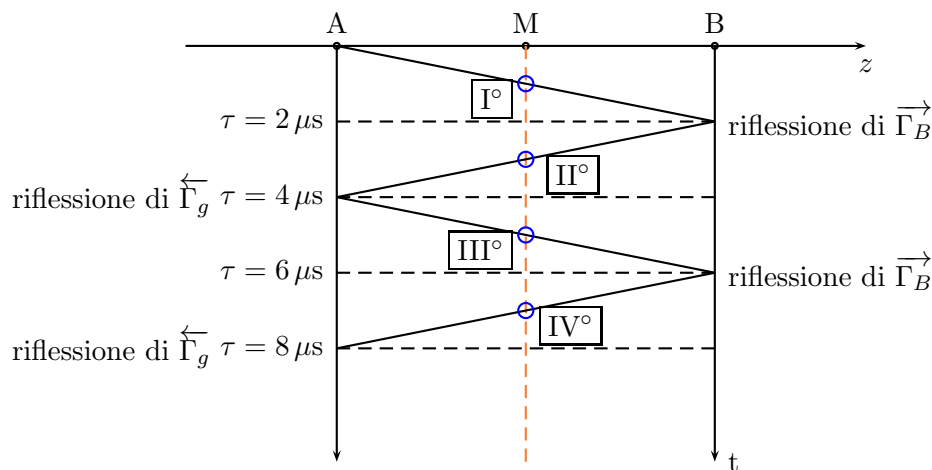
$$\tau_M = \frac{\tau}{2} = 1 \mu s$$

Determiniamo $\overleftarrow{\Gamma}_g$ e $\overrightarrow{\Gamma}_B$:

$$\overleftarrow{\Gamma}_g = \frac{R_G - Z_\infty}{R_G + Z_\infty} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -0.33$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_B = \frac{R_L - Z_\infty}{R_L + Z_\infty} = \frac{75 - 50}{75 + 50} = 0.2$$

Diagramma a traliccio:



Nel punto M la tensione è data da 4 contributi:

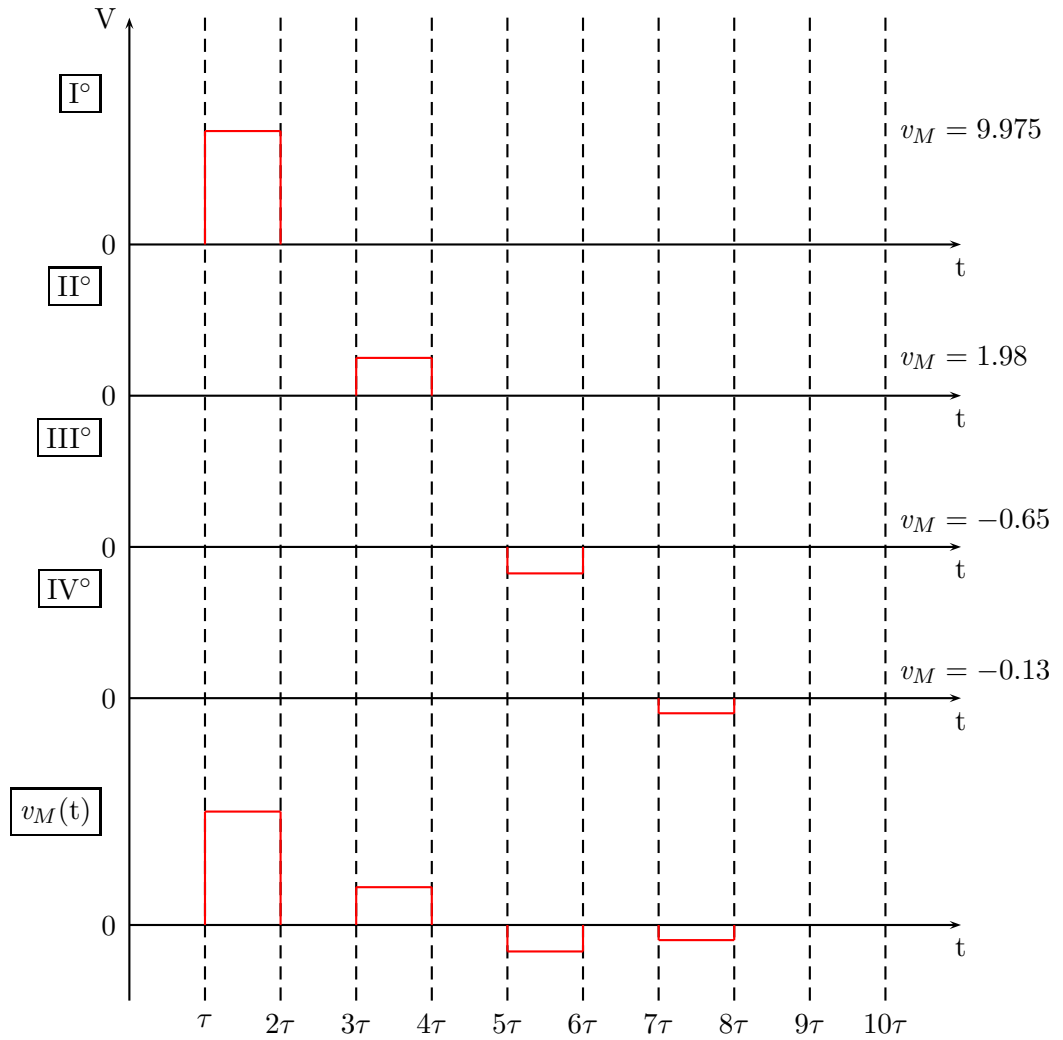
$$\text{I}^\circ \cdot v_{A_0}(t - \tau_M) = V_0 \cdot p_T(t - \tau_M) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} = 9.975 \cdot p_T(t - \tau_M)$$

$$\begin{aligned} \text{II}^\circ \cdot v_{A_0}(t - [2\tau - \tau_M]) &= V_0 \cdot p_T(t - [2\tau - \tau_M]) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B = \\ &= 1.98 \cdot p_T(t - [2\tau - \tau_M]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III}^\circ \cdot v_{A_0}(t - [3\tau - \tau_M]) &= V_0 \cdot p_T(t - [3\tau - \tau_M]) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B \cdot \overleftarrow{\Gamma}_g = \\ &= -0.65 \cdot p_T(t - [3\tau - \tau_M]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV}^\circ \cdot v_{A_0}(t - [4\tau - \tau_M]) &= V_0 \cdot p_T(t - [4\tau - \tau_M]) \cdot \frac{1 - \overleftarrow{\Gamma}_g}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_B^2 \cdot \overleftarrow{\Gamma}_g = \\ &= -0.13 \cdot p_T(t - [4\tau - \tau_M]) \end{aligned}$$

Diagramma di $v(t)$ nel punto M:



Parte III

Onde

Capitolo 9

Onde piane

9.1 Teoria

In questa sezione non verrà discussa la parte teorica vera e propria, ma si illustreranno i simboli utilizzati negli esercizi e si faranno alcuni accenni alle definizioni principali.

Campo elettrico nel dominio del tempo:	$\mathcal{E}(\underline{r}, t)$
Fasore del campo elettrico:	$\underline{E}(\underline{r})$
Campo magnetico nel dominio del tempo:	$\underline{h}(\underline{r}, t)$
Fasore del campo magnetico:	$\underline{H}(\underline{r})$
Scomposizione di fasori:	$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}'(\underline{r}) + j\underline{E}''(\underline{r})$
$\underline{E}'(\underline{r})$	parte reale del fasore
$j\underline{E}''(\underline{r})$	parte immaginaria del fasore
\hat{x}	versore di x
\hat{y}	versore di y
\hat{z}	versore di z
\underline{r}	vettore
$\hat{e}_o = \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}}$	versore circolare orario
$\hat{e}_a = \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}}$	versore circolare antiorario
$\underline{E}' \cdot \underline{E}$	prodotto scalare
$\underline{E}' \times \underline{E}''$	prodotto vettoriale
$\langle \underline{E}, \hat{e}_o \rangle$	proiezione del campo sul versore

Dato un fasore scomposto in parte reale e parte immaginaria esistono 3 tipi di polarizzazione per i campi elettrico e magnetico.

- . polarizzazione lineare;
- . polarizzazione circolare;

. polarizzazione ellittica;

Condizioni di esistenza delle polarizzazioni.

. Polarizzazione Lineare

$$\underline{\mathbf{E}}'(r) // \underline{\mathbf{E}}''(r)$$

I due fasori devono essere paralleli, dunque:

$$\underline{\mathbf{E}}'(r) \times \underline{\mathbf{E}}''(r) = 0$$

. Polarizzazione Circolare

Per la polarizzazione circolare le condizioni di esistenza sono due:

$$|\underline{\mathbf{E}}'(r)| = |\underline{\mathbf{E}}''(r)|$$

$$\underline{\mathbf{E}}'(r) \cdot \underline{\mathbf{E}}''(r) = 0$$

. Polarizzazione Ellittica

Se la polarizzazione non è lineare nè circolare è ellittica.

Una polarizzazione ellittica può essere scomposta in due polarizzazioni circolari (oraria e antioraria).

$$\underline{\mathbf{E}}(r) = \underline{\mathbf{E}}_o + \underline{\mathbf{E}}_a$$

dove:

$$\underline{\mathbf{E}}_o = m \hat{e}_o$$

$$\underline{\mathbf{E}}_a = n \hat{e}_a$$

Relazioni fra campo elettrico e magnetico:

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = Z_0 \cdot (\underline{\mathbf{H}}_0 \times \hat{k})$$

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = Y_0 \cdot (\hat{k} \times \underline{\mathbf{E}}_0)$$

dove:

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ rappresenta l'impedenza intrinseca del vuoto pari a 377Ω

$Y_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ rappresenta l'ammettenza intrinseca del vuoto pari a 2.65 mS .

9.2 Esercizi

9.2.1 Esercizio 1

Testo

Dato il fasore $\underline{\mathbf{E}}(\underline{r}) = 2 \hat{x} + (3 + j) \hat{y}$ determinare il tipo di polarizzazione e valutare $\underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t)$.

Risoluzione

Scomponiamo il fasore in:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}'(\underline{r}) &= 2 \hat{x} + 3 \hat{y} \\ \underline{\mathbf{E}}''(\underline{r}) &= \hat{y}\end{aligned}$$

Verifichiamo le condizioni per la polarizzazione circolare:

$$|\underline{\mathbf{E}}'(\underline{r})| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\underline{\mathbf{E}}''(\underline{r})| = \sqrt{1^2} = \sqrt{1}$$

I due moduli non sono uguali.

$$\underline{\mathbf{E}}'(\underline{r}) \cdot \underline{\mathbf{E}}''(\underline{r}) = (2 \hat{x} + 3 \hat{y}) \cdot \hat{y} = (2 \cdot 0) + (3 \cdot 1) \neq 0$$

La polarizzazione non è circolare.

Verifichiamo ora la condizione per la polarizzazione lineare:

$$\underline{\mathbf{E}}'(\underline{r}) \times \underline{\mathbf{E}}''(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x} \cdot (0) - \hat{y} \cdot [(2 \cdot 0) - (0 \cdot 0)] + \hat{z} \cdot [(2 \cdot 1) - (3 \cdot 0)] = 2\hat{z} \neq 0$$

La polarizzazione non è lineare.

Per esclusione la polarizzazione è ellittica. Scomposizione in polarizzazione circolare oraria e circolare antioraria:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{r}) = 2 \hat{x} + (3 + j) \hat{y} = m \hat{e}_o + n \hat{e}_a$$

$$m = \langle \underline{\mathbf{E}}, \hat{e}_o \rangle = \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{e}_o^*$$

$$n = \langle \underline{\mathbf{E}}, \hat{e}_a \rangle = \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{e}_a^*$$

$$m = (2 \hat{x} + (3 + j) \hat{y}) \cdot \frac{\hat{x} - j \hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \cdot (3 + j) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{(3j-1)}{\sqrt{2}} = \frac{3-3j}{\sqrt{2}} \\
 n &= (2\hat{x} + (3+j)\hat{y}) \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \cdot (3+j) = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{(3j-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1+3j}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

A questo punto possiamo determinare l'espressione finale:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{3-3j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} + \frac{1+3j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

Definiamo:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}_o &= \frac{3-3j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \\
 \underline{\mathbf{E}}_a &= \frac{1+3j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Scomponiamo per comodità in:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}'_o &= \frac{3}{2}(\hat{x} + \hat{y}) \\
 \underline{\mathbf{E}}''_o &= j\frac{3}{2}(-\hat{x} + \hat{y}) \\
 \underline{\mathbf{E}}'_a &= \frac{1}{2}(\hat{x} + 3\hat{y}) \\
 \underline{\mathbf{E}}''_a &= j\frac{1}{2}(3\hat{x} - \hat{y})
 \end{aligned}$$

Valutiamo separatamente nel tempo $\underline{\mathbf{E}}_o$ ed $\underline{\mathbf{E}}_a$.

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathcal{E}}_o(\underline{\mathbf{r}}, t) &= \frac{3}{2}(\hat{x} + \hat{y}) \cdot \cos(\omega t) - \frac{3}{2}(-\hat{x} + \hat{y}) \cdot \sin(\omega t) \\
 \underline{\mathcal{E}}_a(\underline{\mathbf{r}}, t) &= \frac{1}{2}(\hat{x} + 3\hat{y}) \cdot \cos(\omega t) - \frac{1}{2}(3\hat{x} - \hat{y}) \cdot \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

9.2.2 Esercizio 2

Testo

Data l'onda piana $\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = (\hat{x} - \frac{j}{2}\hat{z}) \cdot e^{-jk_0y}$ determinare il fasore $\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})$ e calcolare $\underline{\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{r}}, t)$ per $t = \frac{3}{4}T$.

Risoluzione

Il termine k_0 è la costante di propagazione nel vuoto. Un'onda piana si propaga in una direzione definita solitamente da un termine tipo:

$$e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

dove:

$$\underline{\mathbf{k}} = k \hat{n} \quad \hat{n} \text{ direzione di propagazione;}$$

$$\underline{\mathbf{r}} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Nel nostro esercizio dal testo si osserva che l'onda è sul piano (\hat{x}, \hat{z}) quindi si propaga nella direzione \hat{y} .

Analiticamente:

$$k \hat{n} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = k_0 y$$

l'uguaglianza vale solo se $\hat{n} = \hat{y}$.

È stato utilizzato \hat{n} come \hat{k} per evitare confusione. Si tenga a mente questo particolare perchè è importante per il calcolo del campo magnetico.

$$\underline{\mathbf{H}} = Y_0 \cdot (\hat{k} \times \underline{\mathbf{E}}) = Y_0 \cdot (\hat{y} \times \left(\hat{x} - \frac{j}{2} \hat{z} \right)) \cdot e^{-jk_0 y}$$

Risolvendo $(\hat{y} \times \left(\hat{x} - \frac{j}{2} \hat{z} \right))$:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{j}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\hat{x} - \hat{z}$$

Da cui:

$$\underline{\mathbf{H}} = Y_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\hat{x} - \hat{z} \right) \cdot e^{-jk_0 y}$$

Calcoliamo ora $\underline{\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{r}}, t)$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{r}}, t) &= \mathbf{Re} \{ \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) \cdot e^{j\omega t} \} = \mathbf{Re} \left\{ \left(\hat{x} - \frac{j}{2} \hat{z} \right) \cdot e^{-jk_0 y} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \mathbf{Re} \left\{ \left(\hat{x} - \frac{j}{2} \hat{z} \right) \cdot e^{j(\omega t - k_0 y)} \right\} \end{aligned}$$

Il termine $e^{j(\omega t - k_0 y)}$ può anche essere scritto con la formula di Eulero:

$$e^{j(\omega t - k_0 y)} = \cos(\omega t - k_0 y) + j \sin(\omega t - k_0 y)$$

Siccome interessa solo la parte reale moltiplichiamo (\hat{x}) per $[\cos(\omega t - k_0 y)]$ e $(-\frac{j}{2}\hat{z})$ per $[+j \sin(\omega t - k_0 y)]$; il risultato è:

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{r}}, t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t - k_0 y) + \frac{1}{2} \hat{z} \cdot \sin(\omega t - k_0 y)$$

Come ultimo punto determiniamo $\underline{\mathcal{E}}\left(\underline{r}, \frac{3}{4}T\right)$.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ per cui:

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{E}}\left(\underline{r}, \frac{3}{4}T\right) &= \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3}{4}T - k_0 y\right) + \frac{1}{2} \hat{z} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3}{4}T - k_0 y\right) = \\ &= \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi - k_0 y\right) + \frac{1}{2} \hat{z} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi - k_0 y\right) = -\hat{x} \cdot \sin(k_0 y) - \frac{1}{2} \hat{z} \cdot \cos(k_0 y)\end{aligned}$$

9.2.3 Esercizio 3

Testo

Un'onda piana si propaga in un mezzo con $\epsilon_r = 4$ e, nell'origine, è rappresentabile attraverso il fasore:

$$\underline{\mathbf{E}}(0) = \hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x}$$

Dopo averne studiato e definito la polarizzazione, lo si scomponga in due polarizzazioni controrotanti; si calcoli il vettore di propagazione \underline{k} alla frequenza di 10 GHz e si scriva l'espressione finale del campo elettrico e magnetico istantanei $\underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t)$ e $\underline{\mathcal{H}}(\underline{r}, t)$. Si calcoli infine l'espressione della densità di potenza.

Risoluzione

Scomponiamo il fasore in:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}'(0) &= 2\hat{x} + 2\hat{z} \\ \underline{\mathbf{E}}''(0) &= -2\hat{x} - \hat{y}\end{aligned}$$

Verifichiamo le condizioni per la polarizzazione circolare:

$$|\underline{\mathbf{E}}'(0)| = \sqrt{5}$$

$$|\underline{\mathbf{E}}''(0)| = \sqrt{5}$$

I due moduli sono uguali: la polarizzazione potrebbe essere circolare.

$$\underline{\mathbf{E}}'(0) \cdot \underline{\mathbf{E}}''(0) = (2\hat{x} + 2\hat{z}) \cdot (-2\hat{x} - \hat{y}) = -2 \neq 0$$

La polarizzazione non è circolare.

Verifichiamo ora la condizione per la polarizzazione lineare:

$$\underline{\mathbf{E}}'(0) \times \underline{\mathbf{E}}''(0) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x} \cdot (2) - \hat{y} \cdot (4) + \hat{z} \cdot (1) = 2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z} \neq 0$$

La polarizzazione non è lineare.

Poichè la polarizzazione è ellittica possiamo scomporla in polarizzazione circolare oraria e antioraria che soddisfano le richieste del problema.

$$\underline{\mathbf{E}}(r) = \hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x} = m \hat{e}_o + n \hat{e}_a$$

$$m = \langle \underline{\mathbf{E}}, \hat{e}_o \rangle = \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{e}_o^*$$

$$n = \langle \underline{\mathbf{E}}, \hat{e}_a \rangle = \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{e}_a^*$$

$$\begin{aligned} m &= (\hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x}) \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2j}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{2j}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= (\hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x}) \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2j}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2j}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}j \end{aligned}$$

Quindi l'espressione finale è:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(r) &= (-\sqrt{2}j) \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - \sqrt{2}j) \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \\ &= j\hat{x} - \hat{y} + (1 - j) \cdot (\hat{x} - j\hat{y}) = \hat{x} - (1 + j)\hat{y} \end{aligned}$$

Calcolo del vettore di propagazione $\underline{\mathbf{k}}$:

$$\underline{\mathbf{k}} = k \cdot \hat{n} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \hat{n} = k_0 \cdot \sqrt{\epsilon_r} \cdot \hat{n} = \frac{2\pi}{c} \cdot f \cdot \sqrt{\epsilon_r} \cdot \hat{n}$$

In questo caso, a differenza dell'esercizio 2 dove era più facile, non possiamo definire \hat{n} con deduzioni, ma dobbiamo utilizzare la formula generale:

$$\hat{n} = \frac{\underline{\mathbf{E}}' \times \underline{\mathbf{E}}''}{|\underline{\mathbf{E}}' \times \underline{\mathbf{E}}''|} = \frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}}{|2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}|} = \frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{21}}$$

L'espressione di $\underline{\mathbf{k}}$ è dunque:

$$\underline{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{c} \cdot f \cdot \sqrt{\epsilon_r} \cdot \frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{21}}$$

Determiniamo l'espressione di $\underline{\mathbf{E}}(r)$ per ricavare poi $\underline{\mathcal{E}}(r, t)$:

$$\underline{\mathbf{E}}(r) = \underline{\mathbf{E}}(0) \cdot e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned}
& (\hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x}) \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}) \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})} = \\
& = (\hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x}) \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z)}
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo ottenere l'espressione del campo elettrico nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t) &= \mathbf{Re} \{ \underline{\mathbf{E}}(\underline{r}) \cdot e^{j\omega t} \} = \\
&= (\hat{x} + 2\hat{z}) \cdot \cos \left(\omega t - k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z) \right) + \\
&+ (2\hat{x} + \hat{y}) \cdot \sin \left(\omega t - k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z) \right)
\end{aligned}$$

Calcolo di $\underline{\mathbf{H}}(\underline{r})$ per determinare $\underline{h}(\underline{r}, t)$:

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{r}) = Y_0 \cdot [\hat{k} \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{r})] = Y_0 \cdot \left[\frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{21}} \times (\hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x}) \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z)} \right]$$

Risolvero il prodotto esterno $(2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}) \times (\hat{x} - j\hat{y} - 2\hat{z} - 2j\hat{x})$:

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 - 2j & -j & 2 \end{vmatrix} = \\
&= \hat{x} \cdot (-8 - j) - \hat{y} \cdot (4 + 1 - 2j) + \hat{z} \cdot (-2j + 4 - 8j) = -\hat{x} \cdot (8 + j) - \hat{y} \cdot (5 - 2j) + \hat{z} \cdot (4 - 10j) \\
\underline{\mathbf{H}}(\underline{r}) &= \frac{Y_0}{\sqrt{21}} \cdot [-8\hat{x} - 5\hat{y} + 4\hat{z} - j(\hat{x} - 2\hat{y} + 10\hat{z})] \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z)}
\end{aligned}$$

Determiniamo l'espressione del campo magnetico nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}
\underline{h}(\underline{r}, t) &= \mathbf{Re} \{ \underline{\mathbf{H}}(\underline{r}) \cdot e^{j\omega t} \} = \\
&= \frac{Y_0}{\sqrt{21}} \cdot (-8\hat{x} - 5\hat{y} + 4\hat{z}) \cdot \cos \left(\omega t - k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z) \right) + \\
&+ \frac{Y_0}{\sqrt{21}} \cdot (\hat{x} - 2\hat{y} + 10\hat{z}) \cdot \sin \left(\omega t - k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{21}} \cdot (2x - 4y - z) \right)
\end{aligned}$$

Calcolo della densità di potenza.

Se $\underline{k} \cdot \underline{k} \in \mathbb{R}$ l'onda piana non ha perdite e:

$$\frac{dP}{d\Sigma} = \frac{|\underline{\mathbf{E}}(0)|^2}{Z_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r}$$

Verifichiamo la condizione:

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = \left(\frac{2\pi}{c} \cdot f \sqrt{\epsilon_r} \cdot \frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{21}} \right) \cdot \left(\frac{2\pi}{c} \cdot f \sqrt{\epsilon_r} \cdot \frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{21}} \right) =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{c} \cdot f \right)^2 \cdot \frac{4}{21} \cdot (4 + 16 + 1) \in \mathbb{R}$$

Si determina ora $|\underline{\mathbf{E}}(0)|$:

$$|\underline{\mathbf{E}}(0)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{dP}{d\Sigma} = \frac{|\underline{\mathbf{E}}(0)|^2}{Z_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\sqrt{10}^2}{120\pi} \cdot \sqrt{4} = \frac{10}{377} \cdot 2 = 53 \text{ mW/m}^2$$

9.2.4 Esercizio 4

Testo

Nel punto P(2,1,-1) il campo elettrico associato ad un'onda piana assume il seguente valore:

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{\mathbf{r}}, t) = \left[\hat{x}\cos(\omega t) - \hat{y}\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \hat{z}2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

Scomporre il fasore associato a tale campo in due polarizzazioni circolari ortonormali ruotanti in verso opposto.

Risoluzione

Data l'espressione nel dominio del tempo ricaviamo il fasore:

$$\begin{aligned} \cdot \hat{x}\cos(\omega t) &\implies \hat{x} \\ \cdot -\hat{y}\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) &= -\hat{y}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \implies -(1+j)\hat{y} \\ \cdot -\hat{z}2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) &= -\hat{z}2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \implies 2j(1+j)\hat{z} = (2j+2)\hat{z} \end{aligned}$$

L'espressione generale è:

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \hat{x} - (1+j)\hat{y} + (2j+2)\hat{z}$$

Scomponiamo in:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}' &= \hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z} \\ \underline{\mathbf{E}}'' &= -\hat{y} + 2\hat{z} \end{aligned}$$

Determiniamo una base ortonormale scegliendo opportunamente 3 vettori:

1.

$$\hat{e}_1 = \frac{\underline{\mathbf{E}}'}{|\underline{\mathbf{E}}'|} = \frac{\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{6}}$$

2.

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \frac{\underline{\mathbf{E}}' \times \underline{\mathbf{E}}''}{|\underline{\mathbf{E}}' \times \underline{\mathbf{E}}''|} = (\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}) \times (-\hat{y} + 2\hat{z}) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \hat{x} \cdot (2 - 2) - \hat{y} \cdot (2) + \hat{z} \cdot (-1) = -2\hat{y} - \hat{z} \\ \hat{n} &= \frac{-2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\hat{e}_2 &= \hat{n} \times \hat{e}_1 = \left(\frac{-2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{5}} \right) \times \left(\frac{\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{6}} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Poichè però $\hat{n} \perp \hat{x}$ anzichè eseguire il complicato prodotto esterno di prima è sufficiente, per garantire ortonormalità, utilizzare $\hat{e}_1 = \hat{x}$:

$$\begin{aligned}\hat{e}_2 &= \hat{n} \times \hat{x} = \left(\frac{-2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{5}} \right) \times \hat{x} = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{-\hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{5}} \right)\end{aligned}$$

Definiamo ora:

$$\begin{aligned}\hat{e}_o &= \frac{\hat{e}_1 + j\hat{e}_2}{\sqrt{2}} \\ \hat{e}_a &= \frac{\hat{e}_1 - j\hat{e}_2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Determiniamo i due vettori circolari:

$$\begin{aligned}\hat{e}_o &= \frac{\hat{x} + j \left(\frac{-\hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{5}} \right)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\hat{x} - j\hat{y} + j2\hat{z}}{\sqrt{10}} \\ \hat{e}_a &= \frac{\hat{x} - j \left(\frac{-\hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{5}} \right)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\hat{x} + j\hat{y} - j2\hat{z}}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{E}}(r) = m \hat{e}_o + n \hat{e}_a$$

Calcoliamo dunque m ed n :

$$\begin{aligned} m &= \langle \underline{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{e}}_o \rangle = \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_o^* \\ n &= \langle \underline{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{e}}_a \rangle = \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_a^* \end{aligned}$$

$$m = (\hat{x} - (1+j)\hat{y} + (2j+2)\hat{z}) \cdot \frac{\sqrt{5}\hat{x} - j\hat{y} + j2\hat{z}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5} + 1 - j\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$n = (\hat{x} - (1+j)\hat{y} + (2j+2)\hat{z}) \cdot \frac{\sqrt{5}\hat{x} + j\hat{y} - j2\hat{z}}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{5} + 1 + j\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

L'espressione del fasore campo elettrico risulta quindi essere:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(\underline{r}) &= \left(\frac{\sqrt{5} + 1 - j\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}\hat{x} - j\hat{y} + j2\hat{z}}{\sqrt{10}} \right) + \\ &+ \left(\frac{-\sqrt{5} + 1 + j\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}\hat{x} + j\hat{y} - j2\hat{z}}{\sqrt{10}} \right) \end{aligned}$$

9.2.5 Esercizio 5

Testo

Scrivere l'espressione del campo magnetico di un'onda piana polarizzata circolarmente nel piano xy , che si propaga lungo l'asse z , che ruota con verso antiorario per un osservatore che la vede arrivare e forma un angolo di 45 gradi con l'asse x quando $t = \frac{T}{4}$ e $z = \frac{\lambda}{6}$. La densità di potenza associata al campo vale 1 W/m^2 .

Risoluzione

Scriviamo l'espressione generale con i dati forniti dal problema:

$$\underline{\mathbf{H}} = H_0(\hat{x} - j\hat{y})e^{j\phi x}e^{-jkz}$$

$$\begin{aligned} \underline{h}(\underline{r}, t) &= H_0 \cdot \mathbf{Re} \{ \underline{\mathbf{H}} \cdot e^{j\omega t} \} = H_0 \cdot \mathbf{Re} \left\{ (\hat{x} - j\hat{y})e^{j\phi x}e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \\ &= H_0 [\cos(-kz + \phi x + \omega t)\hat{x} + \sin(-kz + \phi x + \omega t)\hat{y}] \end{aligned}$$

Sostituiamo $t = \frac{T}{4}$ e $z = \frac{\lambda}{6}$:

$$\begin{aligned} \underline{h}(\underline{r}, t) &= H_0 \left[\cos \left(- \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{6} \right) + \phi x + \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) \right) \hat{x} + \right. \\ &\quad \left. \sin \left(- \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{6} \right) + \phi x + \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) \right) \hat{y} \right] = \\ &= H_0 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} + \phi x + \frac{\pi}{2} \right) \hat{x} + \sin \left(-\frac{\pi}{3} + \phi x + \frac{\pi}{2} \right) \hat{y} \right] = \end{aligned}$$

$$= H_0 \left[\cos \left(\phi x + \frac{\pi}{6} \right) \hat{x} + \sin \left(\phi x + \frac{\pi}{6} \right) \hat{y} \right]$$

L'onda incide con un angolo di 45° ovvero $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\phi x + \frac{\pi}{6} \right) \implies \phi x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

L'espressione generale del campo è:

$$\underline{h} \left(\frac{\lambda}{6}, \frac{T}{4} \right) = \left[\cos \left(-kz + \omega t + \frac{\pi}{12} \right) \hat{x} + \sin \left(-kz + \omega t + \frac{\pi}{12} \right) \hat{y} \right]$$

Calcoliamo il parametro H_0 ; per l'osservatore l'onda arriva con verso antiorario quindi la sua propagazione avviene in senso orario:

$$\underline{h} \left(\frac{\lambda}{6}, \frac{T}{4} \right) = H_0 \frac{(\hat{x} + j\hat{y})}{\sqrt{2}}$$

Ricaviamo il modulo:

$$\left| \underline{h} \left(\frac{\lambda}{6}, \frac{T}{4} \right) \right| = |H_0| \left| \frac{(\hat{x} + j\hat{y})}{\sqrt{2}} \right| = H_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = H_0$$

Poichè conosciamo il valore della densità di potenza:

$$\frac{dP}{d\Sigma} = \frac{|E|^2}{Z_0} = |H|^2 \cdot Z_0$$

Possiamo determinare il valore di H_0 :

$$H_0 = |H| = \sqrt{\frac{\frac{dP}{d\Sigma}}{Z_0}} = \sqrt{\frac{1 \text{ W/m}^2}{377 \Omega}} = 51.5 \text{ mA/m}$$

Capitolo 10

Guide d'onda

10.1 Teoria

La parte teorica con dimostrazioni di Markuvitz-Schwinger, equazioni di Helmholtz, problemi di Dirichlet e di Neumann, grandezze caratteristiche dei modi TE e TM, propagazione in guida d'onda sono reperibili sul mio sito, il cui indirizzo è riportato nella prefazione.

Tabella riassuntiva per le sorgenti di campo:

$$\begin{array}{c} \uparrow J_{et}, J_{mt} \\ \longrightarrow J_{ez}, J_{mz} \end{array}$$

J_{et}, J_{mz} eccitano modi trasverso elettrici; danno vita ad una sorgente di campo in corrente:

$$i = \langle \vec{e}_{m,n}, J_{et} \rangle + Y_{tm,n}^* \langle J_{mz}, \vec{h}_{m,n} \rangle$$

J_{ez}, J_{mt} eccitano modi trasverso magnetici; danno vita ad una sorgente di campo in tensione:

$$v = \langle \vec{h}_{m,n}, J_{mt} \rangle + Z_{tm,n}^* \langle J_{ez}, \vec{e}_{m,n} \rangle$$

10.2 Esercizi

10.2.1 Esercizio 1

Testo

Progettare una guida d'onda rettangolare in cui la dimensione b risulta essere inferiore del 60% rispetto ad a . La guida deve essere monomodale nella banda di utilizzo $B = [2.5, 4]$ GHz e il primo modo superiore si deve attenuare di almeno 3 dB/cm. Si tenga presente che la velocità di gruppo del modo fondamentale deve essere a variazione minima nella banda B .

Risoluzione

La dimensione b è ridotta del 60% rispetto ad a :

$$b = 40\%a \implies b = 0.4a$$

Poichè $b < a/2$ si propaga solo il modo TE_{10} (modo sopra taglio), mentre il modo TE_{20} risulta essere il primo modo superiore (modo sotto taglio).

Per garantire monomodalità occorre che:

$$[f_1, f_2] \leq [2.5, 4]$$

$$\begin{cases} f_1 > f_{cm,n} & \implies f_1 > f_{c1,0} \\ f_2 < f_{cm,n} & \implies f_2 < f_{c2,0} \end{cases}$$

La formula per calcolare la frequenza di taglio, o frequenza critica:

$$f_{cm,n} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Nel nostro caso:

$$f_{c1,0} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{c}{2a}$$

$$f_{c2,0} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{c}{a}$$

Riepilogando:

$$\begin{cases} f_1 > f_{c1,0} & \implies f_1 > \frac{c}{2a} \\ f_2 < f_{c2,0} & \implies f_2 < \frac{c}{a} \end{cases}$$

Possiamo ricavare un valore minimo e uno massimo per a :

$$\begin{cases} a > \frac{c}{2f_1} & \implies & a > \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 2.5 \cdot 10^9} & a > 60 \text{ mm} \\ a < \frac{c}{f_2} & \implies & a < \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^9} & a < 75 \text{ mm} \end{cases}$$

Se nella guida fosse presente una discontinuità tutti i modi verrebbero eccitati e quindi potrebbero propagarsi. Bisogna garantire che il primo modo superiore, il TE_{20} , venga attenuato.

$$\alpha_{20} \geq 3 \text{ dB/cm} \implies \alpha_{20} \geq 300 \text{ dB/m}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} k_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{f_{c20}}{f_2}\right)^2 - \epsilon_r} &\geq \alpha_{20} \\ \frac{2\pi}{c} \cdot f_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{a \cdot f_2}\right)^2 - 1} &\geq \frac{300}{20 \log_{10} e} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{a \cdot f_2}\right)^2 - 1} &\geq \frac{34.6}{2\pi \cdot f_2} \implies \left(\frac{1}{a \cdot f_2}\right)^2 - 1 \geq \left(\frac{34.6}{2\pi \cdot f_2}\right)^2 \end{aligned}$$

Si ricava che:

$$a \leq 65.7 \text{ mm}$$

Le condizioni finora ottenute sono: $60 \text{ mm} < a \leq 65.7 \text{ mm}$.

La velocità di gruppo deve avere variazioni minime:

$$v_g = \frac{c}{\epsilon_r} \cdot \sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{f_{cm,n}}{f}\right)^2}$$

Nel nostro caso:

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c1,0}}{f_1}\right)^2}$$

Se l'argomento della radice fosse negativo il modo TE_{10} sarebbe sotto taglio quindi la condizione da imporre è:

$$\frac{f_{c1,0}}{f_1} < 1 \implies f_1 > f_{c1,0}$$

Per avere variazioni minime la frequenza inferiore deve essere il più possibile maggiore della frequenza critica:

$$f_1 \gg f_{c1,0} \implies f_1 \gg \frac{c}{2a}$$

Invertendo si ricava:

$$a \gg \frac{c}{2f_1}$$

La scelta del parametro a sarà dunque quella massima possibile, ossia 65.7 mm .

A questo punto è possibile ricavare anche il parametro b :

$$b = 0.4 a = 0.4 \cdot 65.7 = 26.28 \text{ mm}$$

10.2.2 Esercizio 2

Testo

All'interno di una guida WR90 ($a = 2.286$ cm, $b = 1.016$ cm) il costruttore, durante l'operazione di riempimento con un dielettrico caratterizzato da $\epsilon_r = 4$, ha lasciato una discontinuità. Si calcoli a che distanza dalla discontinuità il primo modo superiore risulta essere attenuato di 30 dB, visto che la guida opera con un segnale a 5 GHz.

Risoluzione

Calcoliamo le frequenze dei primi modi fondamentali:

$$f_{c10}^d = \frac{c}{2 \cdot a \cdot \sqrt{\epsilon_r}} = 3.28 \text{ GHz il modo TE}_{10} \text{ si propaga}$$

$$f_{c20}^d = \frac{c}{a \cdot \sqrt{\epsilon_r}} = 6.56 \text{ GHz il modo TE}_{20} \text{ non si propaga}$$

Si deduce quindi che il primo modo superiore (quello che non si propaga) è il TE₂₀.

Il modo TE₂₀ deve attenuarsi di 30 dB a distanza d dalla discontinuità:

$$20 \log_{10} e^{-\alpha_{20} d} = -30$$

Determiniamo il parametro argomento dell'esponenziale α_{20} :

$$\alpha_{20} = k_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{f_{c20}}{f}\right)^2 - \epsilon_r} = \frac{2\pi}{c} \cdot f \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{af}\right)^2 - 4} = 1.0472 \cdot 1.6996 = 1.7798 \text{ cm}^{-1}$$

Per cui:

$$20 \log_{10} e^{-1.7798 d} = -30$$

Invertendo la formula si ottiene:

$$d = \frac{-30}{-1.7798 \cdot 20 \log_{10} e} = \frac{-30}{-1.7798 \cdot 8.686} = 1.94 \text{ cm}$$

10.2.3 Esercizio 3

Testo

Si consideri una guida d'onda rettangolare standard WR28 ($a = 28$ centesimi di pollice, $b = a/2$). Sapendo che tutti i modi superiori devono essere attenuati di almeno 1 dB/cm, e che la velocità di gruppo del modo fondamentale deve presentare variazioni massime del 10%, valutare l'effettiva banda di utilizzo.

Calcolare quindi la massima potenza trasportabile in condizioni di disadattamento, quando la guida è chiusa su un'impedenza di valore 50 Ω . Il campo di rottura vale 5.6 MV/m.

Risoluzione

Parametri della guida WR28.

1 pollice corrisponde a 2.54 cm: $a = 2.54 \cdot \frac{28}{100} = 0.7112$, di conseguenza $b = 0.3556$.

La banda di utilizzo incognita sarà:

$$B = (f_1, f_2)$$

f_1 frequenza inferiore

f_2 frequenza superiore.

Sapendo che tutti i modi superiori devono essere attenuati di almeno 1 dB/cm è possibile determinare l'estremo superiore della banda utilizzata.

I modi superiori sono TE₁₀=TE₂₀ perchè siamo nel caso in cui una dimensione è esattamente la metà dell'altra.

$$f_{c20}^{vuoto} = \frac{c}{a} = \frac{3 \cdot 10^8}{0.7112} = 42.18 \text{ GHz}$$

L'estremo superiore f_2 dovrà essere minore di 42.18 GHz affinché i campi si propaghino.

$$K_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{f_{c20}^{vuoto}}{f_2}\right)^2 - 1} \geq \alpha_{min}$$

Determiniamo il valore di α_{min} :

$$\alpha_{min} = \frac{1 \text{ dB/cm}}{20 \log_{10} e} = \frac{100 \text{ dB/m}}{8.686} = 11.51 \text{ Np/m} = 0.1151 \text{ Np/cm}$$

A questo punto possiamo ricavare f_2 :

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{f_{c20}^{vuoto}}{f_2}\right)^2 - 1} &\geq \frac{\alpha_{min}}{K_0} \implies \left(\frac{f_{c20}^{vuoto}}{f_2}\right)^2 - 1 \geq \left(\frac{\alpha_{min}}{K_0}\right)^2 \\ \left(\frac{f_{c20}^{vuoto}}{f_2}\right)^2 &\geq \left(\frac{c \cdot \alpha_{min}}{2\pi \cdot f_2}\right)^2 + 1 \implies 2\pi \cdot f_{c20}^{vuoto} \geq (c \cdot \alpha_{min}) - (2\pi \cdot f_2) \\ f_2 &\leq \left(\frac{c \cdot \alpha_{min}}{-2\pi}\right) - \left(\frac{2\pi \cdot f_{c20}^{vuoto}}{-2\pi}\right) \implies f_2 \leq -\left(\frac{c \cdot \alpha_{min}}{2\pi}\right) + f_{c20}^{vuoto} \\ f_2 &= \sqrt{(f_{c20}^{vuoto})^2 - \left(\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 0.1151}{2\pi}\right)^2} = 42.17 \text{ GHz} \end{aligned}$$

Il valore ottenuto è minore di f_{c20}^{vuoto} quindi la condizione vincolante è rispettata.

Per ricavare l'estremo inferiore della banda di utilizzo sfruttiamo l'informazione sulla velocità di gruppo:

$$v_{g10} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}^{vuoto}}{f}\right)^2} \cong 0.260 \cdot 10^9 \text{ m/s}$$

Poichè deve presentare variazioni massime del 10%:

$$v_{g10} - 0.1 \cdot v_{g10} = 0.260 - 0.026 \cong 0.234 \cdot 10^9 \text{ m/s}$$

$$\left(\frac{0.234 \cdot 10^9}{c}\right)^2 \cong 1 - \left(\frac{f_{c10}^{vuoto}}{f_1}\right)^2 \implies \left(\frac{0.234 \cdot 10^9}{c}\right)^2 - 1 \cong \left(\frac{f_{c10}^{vuoto}}{f_1}\right)^2$$

$$f_1^2 \left(\frac{0.234 \cdot 10^9}{c}\right)^2 - f_1^2 \cong -(f_{c10}^{vuoto})^2 \implies f_1^2 \cdot \left[\left(\frac{0.234 \cdot 10^9}{c}\right)^2 - 1\right] \cong -(f_{c10}^{vuoto})^2$$

$$f_1 \cong \sqrt{\frac{-(f_{c10}^{vuoto})^2}{\left[\left(\frac{0.234 \cdot 10^9}{c}\right)^2 - 1\right]}} \cong \sqrt{1.132 \cdot 10^{21}} \cong 33 \text{ GHz}$$

La banda di utilizzo è quindi:

$$B = (33 \text{ GHz}, 42.17 \text{ GHz})$$

Determiniamo Z''_{t10} per calcolare P_{max} :

$$Z''_{t10} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}^{vuoto}}{f_1}\right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{21.09}{33}\right)^2}} = 490.25 \Omega$$

$$P_{max} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{|E_{max}|^2}{2 \cdot Z''_{t10}} = \frac{0.253 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot \frac{|5.6 \cdot 10^6|^2}{2 \cdot 490.25} = 404.59 \text{ kW}$$

La linea è disadattata quindi:

$$P_{trasp} = P_{max} \cdot \frac{1}{S}$$

dove S è il ROS.

$$\Gamma_C = \frac{Z_C - Z''_{t10}}{Z_C + Z''_{t10}} = \frac{50 - 490.25}{50 + 490.25} = -0.815$$

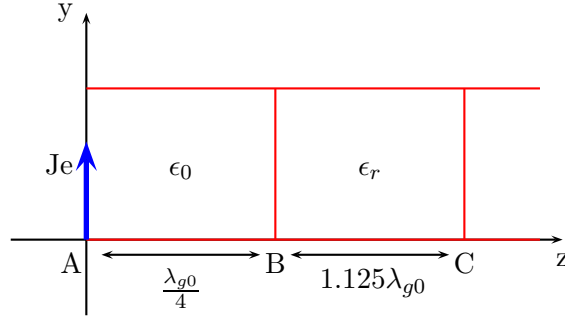
$$\frac{1}{S} = \frac{1 - |\Gamma_C|}{1 + |\Gamma_C|} = \frac{1 - 0.815}{1 + 0.815} = 0.102$$

$$P_{trasp} = P_{max} \cdot \frac{1}{S} = 404.59 \cdot 0.102 = 41.27 \text{ kW}$$

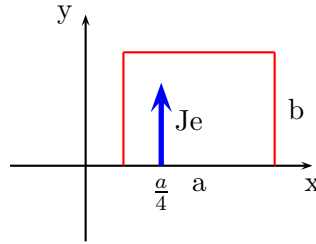
10.2.4 Esercizio 4

Testo

Data la guida d'onda WR90:



La sorgente J_e è posta in:



Sapendo che $f = 9 \text{ GHz}$, $M = 10^{-3} \text{ A/m}$ e $\epsilon_r = 4$ calcolare la potenza associata al modo TE_{10} nel punto C.

Risoluzione

La sorgente di campo è diretta lungo \hat{y} e vale:

$$\vec{J}_{et} = M \cdot \left[\delta \left(x - \frac{a}{4} \right) \delta(y - 0) \delta(z - 0) \hat{y} \right] = M \cdot \left[\delta \left(x - \frac{a}{4} \right) \delta(y) \delta(z) \hat{y} \right]$$

Verifichiamo che il modo TE_{10} sia sopra taglio:

$$f_{c10}^{vuoto} = \frac{c}{2a} = 6.56 \text{ GHz} \qquad f_{c10}^{diel} = \frac{c}{2a\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{4a} = 3.28 \text{ GHz}$$

Alla frequenza di lavoro $f = 9 \text{ GHz}$ il modo è sopra taglio sia nel vuoto sia nel dielettrico.

Calcoliamo la sorgente di campo:

$$i(z) = \langle \vec{e}_{m,n}, J_{et} \rangle + 0$$

Per il modo TE_{10} $\vec{e}_{m,n}$ risulta essere:

$$\vec{e}_{1,0} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \hat{y}$$

La proiezione diventa:

$$\int \int_{\Sigma_t} \left\{ M \cdot \left[\delta \left(x - \frac{a}{4} \right) \delta(y) \delta(z) \hat{y} \right] \right\} \cdot \left[-\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \hat{y} \right]^* d\Sigma$$

Spezzando l'integrale sulle dimensioni x e y:

$$-M \sqrt{\frac{2}{ab}} \delta(z) \int \delta \left(x - \frac{a}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) dx \int \delta(y) dy = *$$

I due integrali valgono:

- . il termine $\int \delta(y) dy$ vale 1;
- . $\int \delta \left(x - \frac{a}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) dx$: occorre valutare il seno per $x = \frac{a}{4}$.

$$\begin{aligned} * &= -M \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(\frac{\pi}{a} \cdot \frac{a}{4} \right) \delta(z) = -M \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(z) = \\ &= -M \frac{1}{\sqrt{ab}} \delta(z) = -10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2.323}} = -\frac{10^{-3}}{1.524} = -0.656 \text{ mA} \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto:

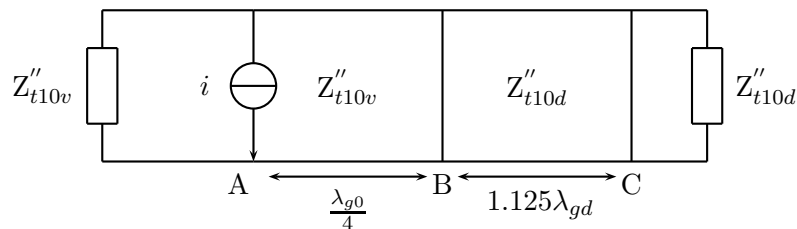


Figura 10.1: linea equivalente

Calcoliamo i parametri Z''_{t10v} e Z''_{t10d} :

$$Z''_{t10v} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{vuoto}}{f_1} \right)^2}} = 550.65 \Omega$$

$$Z''_{t10d} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{f_{diel}}{f_1} \right)^2}} = 202.42 \Omega$$

In questo esercizio è fondamentale notare che nei punti B e C l'impedenza è la stessa (Z''_{t10d}) quindi non bisogna determinare λ_{gd} ; inoltre la distanza tra A e B è una quantità, $\frac{\lambda_{g0}}{4}$, che trasformerà impedenza in ammettenza perciò anche λ_{g0} non è necessario.

$$Z_C = Z_B = Z''_{t10d}$$

$$\zeta_{-B} = \frac{Z_B}{Z''_{t10v}} = \frac{Z''_{t10d}}{Z''_{t10v}} = \frac{202.42}{550.65} = 0.368$$

$$\zeta_{A+} = \frac{1}{\zeta_{-B}} = \frac{1}{0.368} = 2.717$$

$$Z_A = \zeta_{A+} \cdot Z''_{t10v} = 2.717 \cdot 550.65 = 1496.12 \Omega$$

La linea di trasmissione equivalente semplificata è:

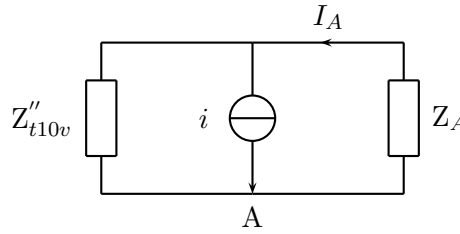


Figura 10.2: linea equivalente semplificata

Calcolo della potenza:

$$P_A = \frac{1}{2} |I_A|^2 \cdot \mathbf{Re} \{Z_A\}$$

Il termine $|I_A|$ può essere determinato con il partitore di corrente:

$$|I_A| = \frac{Z''_{t10v}}{Z''_{t10v} + Z_A} \cdot i$$

Sostituendo nell'espressione precedente:

$$P_A = \frac{1}{2} \left| \frac{Z''_{t10v}}{Z''_{t10v} + Z_A} \cdot i \right|^2 \cdot \mathbf{Re} \{Z_A\}$$

Con i valori numerici:

$$P_A = \frac{1}{2} \left| \frac{550.65}{550.65 + 1496.12} \cdot (-0.656) \right|^2 \cdot \mathbf{Re} \{1496.12\} = 23.3 \text{ mW}$$

Poichè non ci sono perdite nel tratto \overline{BC} la potenza rimane la stessa.

Parte IV

Antenne

Capitolo 11

Teoria

Nella parte teorica si riportano tutte le formule principali per lo svolgimento degli esercizi.

Campo elettrico:

$$\underline{E}(\hat{r}) = \frac{-jZ_0 e^{-jk_0 r}}{2r\lambda} \cdot \underline{P}_e(\hat{r})$$

Momento elettrico generalizzato:

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \mathcal{F}^3 \{ \underline{J}_e \} \Big|_{k_0 r} \cdot \underline{I}_{t, \hat{r}} + \mathcal{F}^3 \{ \underline{J}_m \} \Big|_{k_0 r} \cdot \underline{I}_{t, \hat{r}}$$

Altezza efficace:

$$\underline{h}_{eff}(\hat{r}) = \frac{\underline{P}_e(\hat{r})}{I_{ant}}$$

Tensione del circuito equivalente d'antenna:

$$V_{ant} = \underline{E}_{inc}(r) \cdot \underline{h}_{eff}(\hat{r})$$

Potenza ed efficienza:

$$P_{alim} = P_{diss} + P_{irr} \quad \eta = \frac{P_{irr}}{P_{alim}} = 1 + \frac{P_{irr}}{P_{diss}}$$

Guadagno:

$$G = \frac{\frac{dP_{irr}}{d\Sigma}}{\frac{P_{alim}}{4\pi r^2}} = \frac{\frac{dP_{irr}}{d\Omega}}{\frac{P_{alim}}{4\pi}}$$

Angolo solido:

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} \quad d\Sigma = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Densità di potenza irradiata per unità di superficie:

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{|E|^2}{Z_0}$$

Area equivalente:

$$A_{eq} = \nu \cdot A_{geo} \qquad A_{eq} = \frac{P_{disp}}{\frac{dP_{inc}}{d\Sigma}}$$

Formule di passaggio fra parametri (guadagno, area equivalente, altezza efficace):

$$\begin{aligned} A_{eq} &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G & G &= \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_{eq} \\ A_{eq} &= \frac{|\underline{h}_{eff}|^2 \cdot Z \cdot \chi}{4 \cdot \mathbf{Re}\{Z_{ant}\}} & |\underline{h}_{eff}|^2 &= \frac{4 \cdot \mathbf{Re}\{Z_{ant}\}}{Z \cdot \chi} \cdot A_{eq} \\ G &= \frac{|\underline{h}_{eff}|^2 \cdot Z \cdot \pi}{\lambda^2 \cdot \mathbf{Re}\{Z_{ant}\}} & |\underline{h}_{eff}|^2 &= \frac{\lambda^2 \cdot \mathbf{Re}\{Z_{ant}\}}{Z \cdot \pi} \cdot G \end{aligned}$$

Ponte radio, formula di Friis:

$$P_{disp}^{RX} = P_{alim}^{TX} \cdot \frac{G_{TX} \cdot G_{RX}}{\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2} \cdot \chi$$

Il termine χ :

$$\chi = |\hat{p}_{tx} \cdot \hat{p}_{rx}|^2$$

dove:

- \hat{p}_{tx} è il versore del campo elettrico in trasmissione;
- \hat{p}_{rx} è il versore del campo elettrico in ricezione;

Se il prodotto scalare è uguale ad 1 siamo in condizioni ideali; se invece è uguale a 0 non si ha ricezione.

Direttività di antenna:

$$d = \frac{\frac{dP_{irr}}{d\Sigma}}{\frac{dP_{irr}}{4\pi r^2}} \qquad d = \frac{\frac{dP_{irr}}{d\Omega}}{\frac{dP_{irr}}{4\pi}}$$

Relazioni fondamentali:

$$\int_{\Sigma} G d\Omega = 4\pi\eta \qquad \int_{\Sigma} d d\Omega = 4\pi$$

Da cui si evidenzia che:

$$G = \eta \cdot d$$

Capitolo 12

Esercizi

12.1 Esercizio 1

Testo

Si calcoli l'area equivalente e il guadagno per una antenna ad apertura circolare con raggio $r = 1.5$ m ed efficienza di apertura $\nu = 0.75$, alla frequenza $f = 5$ GHz.

Risoluzione

Avendo a disposizione dal testo il valore del raggio e del coefficiente di apertura possiamo determinare immediatamente l'area equivalente:

$$A_{eq} = \nu \cdot A_{geo} = \nu \cdot (\pi r^2) = 0.75 \cdot (\pi 1.5^2) = 0.75 \cdot 7.069 = 5.30 \text{ m}^2$$

Calcoliamo il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 0.06 \text{ m}$$

Con la formula di passaggio fra A_{eq} e G determiniamo il guadagno:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_{eq} = \frac{4\pi}{0.06^2} \cdot 5.30 = 3490.66 \cdot 5.3 = 18500.5$$

Espresso in dB:

$$G|_{dB} = 10 \log_{10}(18500.5) = 42.17 \text{ dB}$$

12.2 Esercizio 2

Testo

Calcolare la densità di potenza irradiata a 1 Km di distanza lungo la direzione del massimo di irradiazione di un'antenna, sapendo che: $P_{alim} = 100$ W, $A_{eq} = 0.5$ m² e $f = 1$ GHz

Risoluzione

Determiniamo il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^9} = 0.3 \text{ m}$$

Calcoliamo il guadagno con la formula di passaggio dell'area equivalente:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_{eq} = \frac{4\pi}{0.3^2} \cdot 0.5 = 139.63 \cdot 0.5 = 69.82$$

La formula generale del guadagno è:

$$G = \frac{\frac{dP_{irr}}{d\Sigma}}{\frac{P_{alim}}{4\pi R^2}}$$

Invertendo è possibile ricavare:

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{P_{alim}}{4\pi R^2} \cdot G = \frac{100}{4\pi 1000^2} \cdot 69.82 = (7.96 \cdot 10^{-6}) \cdot 69.82 = 0.56 \text{ mW/m}$$

12.3 Esercizio 3

Testo

Un paraboloide avente coefficiente di apertura $\nu = 0.6$ di diametro $D = 2$ m è alimentato con $P_{alim} = 10$ W a $f = 5$ GHz . Calcolare il campo magnetico sull'asse alla distanza $R = 20$ km.

Risoluzione

Determiniamo il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 0.06 \text{ m}$$

Il raggio r del paraboloide risulta essere:

$$r = \frac{D}{2} = 1 \text{ m}$$

Il guadagno di antenna è:

$$G = \frac{\frac{dP_{irr}}{d\Sigma}}{\frac{P_{alim}}{4\pi R^2}}$$

Sapendo che:

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = \frac{|E|^2}{Z_0}$$

Occorre determinare il valore di G per poter invertire la formula precedente; calcoliamo l'area equivalente e poi con la formula di passaggio ricaviamo il guadagno:

$$A_{eq} = \nu \cdot A_{geo} = \nu \cdot (\pi r^2) = 0.6 \cdot (\pi 1^2) = 0.6 \cdot 3.14 = 1.884 \text{ m}^2$$

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_{eq} = \frac{4\pi}{0.06^2} \cdot 1.884 = 3490.66 \cdot 1.884 = 6576.4$$

A questo punto:

$$\frac{dP_{irr}}{d\Sigma} = G \cdot \frac{P_{alim}}{4\pi R^2} = 6576.4 \cdot \frac{10}{4\pi 20000^2} = 6576.4 \cdot (1 \cdot 10^{-9}) = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

Calcoliamo $|E|$:

$$|E| = \sqrt{Z_0 \cdot \frac{dP_{irr}}{d\Sigma}} = \sqrt{377 \cdot 1.3 \cdot 10^{-5}} = \sqrt{0.004901} = 0.07 \text{ V/m}$$

Conoscendo il modulo del campo elettrico, determiniamo il modulo del campo magnetico nel seguente modo:

$$|H| = Y_0 \cdot |E| = 0.00265 \cdot 0.07 = 1.84 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}$$

12.4 Esercizio 4

Testo

Un trasmettitore radiofonico opera a 95 MHz, con potenza di trasmissione pari a 7 KW. Il guadagno dell'antenna trasmittente è pari a 13 dB nella direzione di collegamento, e la polarizzazione è circolare. Calcolare (in modulo) il campo elettrico e magnetico trasmessi nella direzione di collegamento alla distanza di 10 Km.

Un ricevitore collegato ad un'antenna polarizzata linearmente posta nello stesso punto, misura in ingresso 1 mW. Il ricevitore è adattato alla linea e all'antenna in ricezione (impedenza in ingresso del ricevitore pari a 50 Ω impedenza di antenna pari a 50 Ω). La linea è lunga 7 m e presenta un'attenuazione di 0.3 dB/m. Calcolare l'area equivalente (in m^2) e il guadagno (in dB) dell'antenna ricevente.

Risoluzione

Determiniamo il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{95 \cdot 10^6} = 3.16 \text{ m}$$

Calcoliamo l'equivalente lineare del guadagno:

$$G = 10^{\frac{G_{dB}}{10}} = 10^{\frac{13}{10}} = 19.95$$

Come sappiamo invertendo la formula del guadagno si può determinare la densità di potenza irradiata per unità di superficie:

$$\frac{dP_{\text{irr}}}{d\Sigma} = G \cdot \frac{P_{\text{alim}}}{4\pi R^2} = 19.95 \cdot \frac{7000}{4\pi 10000^2} = 19.95 \cdot (1 \cdot 10^{-9}) = 5.57 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Poichè:

$$\frac{dP_{\text{irr}}}{d\Sigma} = \frac{|E|^2}{Z_0}$$

Determiniamo il valore del modulo del campo elettrico:

$$|E| = \sqrt{Z_0 \cdot \frac{dP_{\text{irr}}}{d\Sigma}} = \sqrt{377 \cdot 5.57 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{0.0020999} = 0.0458 \text{ V/m}$$

Dal valore del campo elettrico ricaviamo il modulo del campo magnetico:

$$|H| = Y_0 \cdot |E| = 0.0265 \cdot 0.0458 = 1.21 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}$$

Osserviamo il circuito equivalente per risolvere la seconda parte dell'esercizio:

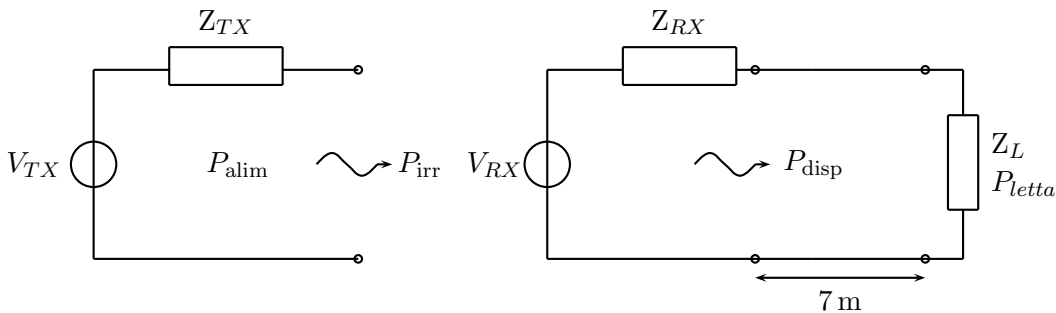


Figura 12.1: linea equivalente

Sapendo che la P_{letta} sul ricevitore (Z_L) è la potenza incidente su un carico adattato alla linea possiamo ricavare P_{disp} :

$$P_{\text{disp}} = P_{\text{letta}} / \text{An}$$

Determiniamo le attenuazioni:

$$\text{An}|_{\text{dB}} = \alpha|_{\text{dB}} \cdot \overline{AB} = 0.3 \cdot 7 = 2.1 \text{ dB}$$

$$\text{An} = 10^{-\frac{\text{An}|_{\text{dB}}}{10}} = 10^{-\frac{2.1}{10}} = 0.617 \text{ Np}$$

Quindi:

$$P_{\text{disp}} = (1 \cdot 10^{-3})/0.617 = 1.621 \text{ mW}$$

La relazione di Friis per il ponte radio:

$$P_{\text{disp}}^{RX} = P_{\text{alim}}^{TX} \cdot \frac{G_{TX} \cdot G_{RX}}{\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2} \cdot \chi$$

Di questa relazione oltre all'incognita che dobbiamo ricavare G_{RX} non conosciamo il valore di χ ; il testo dice che in trasmissione i campi si propagano con polarizzazione circolare mentre l'antenna in ricezione è polarizzata linearmente:

$$\chi = |\hat{p}_{tx} \cdot \hat{p}_{rx}|^2 = \left| \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \hat{x} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Determiniamo il guadagno in ricezione:

$$G_{RX} = \frac{\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2 \cdot P_{\text{disp}}^{RX}}{P_{\text{alim}}^{TX} \cdot G_{TX} \cdot \chi} = \frac{\left(\frac{4\pi 10000}{3.16}\right)^2 \cdot (1.621 \cdot 10^{-3})}{7000 \cdot 19.95 \cdot \frac{1}{2}} = 36.713$$

In decibel:

$$G_{RX_{dB}} = 10 \log_{10}(36.713) = 15.65 \text{ dB}$$

Con la formula di passaggio ricaviamo l'area equivalente:

$$A_{eq} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_{RX} = \frac{3.16^2}{4\pi} \cdot 36.713 = 29.17 \text{ m}^2$$

12.5 Esercizio 5

Testo

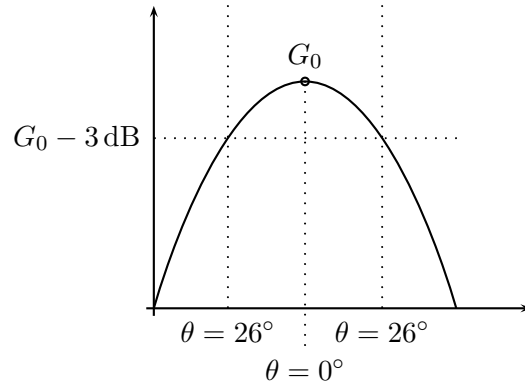
Un'antenna trasmittente, alla frequenza di 35 GHz, ha la seguente funzione guadagno:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= G_0(\cos(\theta))^\alpha && \text{per } 0^\circ < \theta < 90^\circ \\ g(\theta) &= 0.05 && \text{per } 90^\circ < \theta < 180^\circ \end{aligned}$$

Sapendo che l'estensione del lobo a -3 dB è pari a 26 gradi, calcolare α e G_0 . L' antenna è un paraboloide con sezione circolare, il cui fattore di utilizzazione di bocca ν è pari a 0.5 e rendimento η unitario; determinare il diametro dell'antenna.

Risoluzione

Diagramma del guadagno:



In corrispondenza di un angolo pari a 26° si utilizza la prima espressione per il guadagno il cui valore dovrà essere pari a $G_0 - 3$ dB; in dB:

$$G_0|_{dB} + 10\log_{10}(\cos \theta)^\alpha = G_0|_{dB} - 3 \text{ dB}$$

$$G_0|_{dB} + \alpha \cdot 10\log_{10}(\cos \theta) = G_0|_{dB} - 3$$

$$\alpha \cdot 10\log_{10}(\cos(26^\circ)) = -3 \implies \alpha = \frac{-3}{10\log_{10}(\cos(26^\circ))} = 6.474 \text{ dB}$$

Traformato in lineare:

$$\alpha = 10^{\frac{6.474}{10}} = 4.44$$

Determiniamo ora il valore di G_0 ; sappiamo che:

$$\int_{\Sigma} g(\theta) d\Omega = 4\pi\eta$$

dove:

- . l'efficienza $\eta = 1$, dal testo;
- . $d\Omega = \frac{r^2}{r^2} \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$.

L'integrale diventa:

$$\int_{\Sigma} g(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \implies \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} g(\theta) \sin \theta d\theta = 4\pi$$

$$2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} G_0(\cos(\theta))^\alpha \sin \theta d\theta = 4\pi$$

Questo integrale si può risolvere ricorrendo alla regola:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} \cdot [f(x)]^{n+1} + c$$

Il risultato è quindi:

$$\frac{2\pi \cdot G_0}{\alpha + 1} \cdot (-\cos(\theta)^{\alpha+1}) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 4\pi$$

$$\frac{2\pi \cdot G_0}{\alpha + 1} \cdot [(-\cos(\pi/2)^{\alpha+1}) - (-\cos(0)^{\alpha+1})] = 4\pi$$

$$\frac{2\pi \cdot G_0}{\alpha + 1} \cdot (1)^{\alpha+1} = 4\pi \implies 2\pi \cdot G_0 = 4\pi \cdot (\alpha + 1)$$

$$G_0 = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot (\alpha + 1) = 2\alpha + 2 = 2 \cdot 4.44 + 2 = 10.88$$

Calcoliamo il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{35 \cdot 10^9} = 0.00857 \text{ m} = 8.57 \text{ mm}$$

Determiniamo l'area equivalente con la formula di passaggio:

$$A_{eq} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_0 = \frac{0.00857^2}{4\pi} \cdot 10.88 = (5.84 \cdot 10^{-6}) \cdot 10.88 = 6.35 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

Conoscendo l'area equivalente possiamo ricavare l'area geometrica:

$$A_{geo} = \frac{A_{eq}}{\nu} = \frac{6.35 \cdot 10^{-5}}{0.5} = 1.27 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Poichè l'area geometrica è pari a:

$$A_{geo} = \pi r^2$$

Determiniamo il valore del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{A_{geo}}{\pi}} = \sqrt{\frac{1.27 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = \sqrt{4 \cdot 10^{-5}} = 0.0063 \text{ m} = 6.3 \text{ mm}$$

Da cui otteniamo il diametro:

$$D = r \cdot 2 = 6.3 \cdot 2 = 12.6 \text{ mm}$$

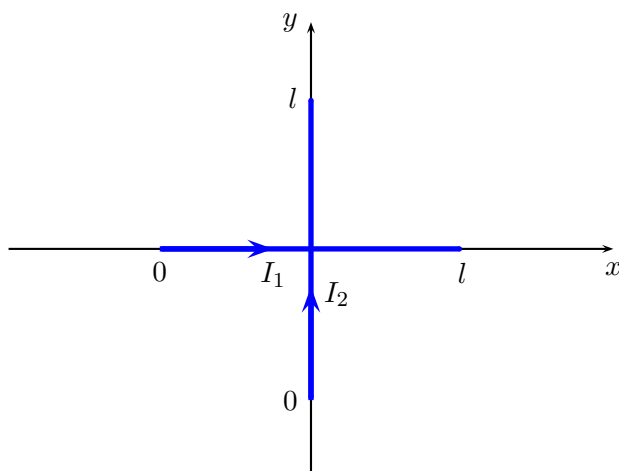
12.6 Esercizio 6

Testo

Si considerino i due dipoli in figura; sapendo che:

$$I_0 = 1 \mu\text{A}, \quad I_1 = I_0, \quad I_2 = \frac{j}{\sqrt{2}} I_0,$$

$$l = 2 \text{ cm}, \quad f = 300 \text{ MHz}$$



Determinare:

1. il campo elettrico (in modulo e fase) nel punto P di coordinate sferiche ($r = 100 \text{ m}$, $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 0^\circ$);
2. successivamente descrivere il tipo di polarizzazione.

Risoluzione

Determiniamo il valore di λ :

$$\lambda = \frac{V_f}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^6} = 1 \text{ m}$$

Valutiamo i dipoli:

$$L = \frac{l}{\lambda} = \frac{0.02}{1} = 0.02$$

Se:

- . $L < \frac{\lambda}{10}$ ci troviamo in presenza di un dipolo corto;
- . $L = \frac{\lambda}{2}$ il dipolo è a mezz'onda.

Nel nostro caso:

$$0.02 < \frac{1}{10} \implies \text{il dipolo è corto.}$$

Per dipoli corti si può approssimare la corrente I costante su tutto il dipolo. Il campo elettrico generato sarà la somma del campo elettrico generato dal dipolo 1 e del campo generato dal dipolo 2:

$$\underline{E}(P) = \underline{E}_1(P) + \underline{E}_2(P)$$

Valutiamo dunque separatamente i due contributi:

$$\underline{E}_1(P) = \frac{-jZ_0 e^{-jk_0 r}}{2r\lambda} \cdot \underline{P}_e(\theta, \varphi)$$

$$\underline{P}_e(\theta, \varphi) = \mathcal{F}^3 \{ \underline{J}_e \} |_{k_0 r} \cdot \underline{I}_{t, \hat{r}} + 0 = \int_l I(z) dz \cdot [\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}]$$

Queste relazioni sono generali per i due dipoli; il dipolo 1 è orientato lungo \hat{x} mentre il secondo lungo \hat{y} :

$$\underline{P}_e^1(\theta, \varphi) = \int_l I_1 \cdot \hat{x} dx \cdot [\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}] = I_1 \cdot l \cdot \hat{x} \cdot [\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}]$$

$$\underline{P}_e^2(\theta, \varphi) = \int_l I_2 \cdot \hat{y} dy \cdot [\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}] = I_2 \cdot l \cdot \hat{y} \cdot [\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}]$$

Poichè:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{aligned}$$

Possiamo risolvere i prodotti scalari ottenendo:

$$\begin{aligned} \underline{P}_e^1(\theta, \varphi) &= I_0 \cdot l \cdot [\cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \theta \hat{\varphi}] \\ \underline{P}_e^2(\theta, \varphi) &= \frac{j}{\sqrt{2}} I_0 \cdot l \cdot [\cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi}] \end{aligned}$$

Il campo generale è quindi:

$$\begin{aligned} \underline{E}(P) &= \frac{-jZ_0 e^{-jk_0 r}}{2r\lambda} \cdot [\underline{P}_e^1(\theta, \varphi) + \underline{P}_e^2(\theta, \varphi)] = \\ &= \frac{-jZ_0 e^{-jk_0 r}}{2r\lambda} \cdot I_0 \cdot l \cdot \left[\left(\cos \theta \cos \varphi + \frac{j}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \varphi \right) \hat{\theta} - \left(\sin \theta - \frac{j}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right) \hat{\varphi} \right] \end{aligned}$$

A questo punto si possono sostituire le coordinate del punto P ricordando che:

$$\cdot Z_0 = 377 \Omega;$$

$$\cdot e^{-jk_0 r} = e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} 100} = 1$$

$$\cdot \lambda = 1$$

Si ottiene:

$$\underline{E}(P) = -j \frac{377 \cdot (1 \cdot 10^{-6}) \cdot (2 \cdot 10^{-2})}{2 \cdot 100} = -j 3.77 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{\hat{\theta} + j\hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Calcoliamo ora il modulo del campo elettrico:

$$\cdot |-j| = 1;$$

$$\cdot |\hat{\theta} + j\hat{\varphi}| = \sqrt{2}$$

Per cui:

$$|\underline{E}(P)| = 3.77 \cdot 10^{-8}$$

Determiniamo la fase del campo elettrico:

$$\angle \underline{E}(P) = -90^\circ + 0 + 45^\circ = -45^\circ$$

La polarizzazione del campo è data da:

$$\frac{\hat{\theta} + j\hat{\varphi}}{\sqrt{2}}$$

che rappresenta una polarizzazione circolare oraria; i versori $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ sono una terna destrorsa quindi sono equivalenti alla terna classica $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.