Lezioni di Calcolo Numerico

Alberto Tibaldi

5 maggio 2018

Qualche parola di introduzione al Calcolo Numerico

Credo che possa essere appropriato iniziare queste note con alcune domande diciamo *ontologiche*.

> «Cos'è il Calcolo Numerico? Perché ci si prende la briga di dedicarvi un corso universitario?»

Per aiutarmi a rispondere a queste domande, vorrei sottoporre all'attenzione del lettore il seguente quesito: come si fa a valutare l'espressione

$$I = \int_4^7 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad ? \tag{1}$$

Uno studente reduce da Analisi Matematica I, pensando al tipico problema di calcolo di integrali definiti, cercherebbe presumibilmente di scrivere la primitiva della funzione in questione, di valutarla agli estremi di integrazione, e calcolare la differenza dei due numeri che troverebbe, sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale. Dopo qualche tentativo a vuoto, il malcapitato si renderebbe conto che questo non è un problema risolubile percorrendo questa strada. Tuttavia, questo non dipende da ragioni *filosofiche*, *astratte*, legate alle proprietà di regolarità di questa funzione. In effetti, per quanto possa sembrare strano, integrare una funzione è, in linea di principio, molto più *indolore* rispetto a derivarla. Infatti, l'integrale è un'operazione che *aumenta la regolarità* di una funzione, che la rende più *liscia*; al contrario, applicare l'operatore di derivazione produce funzioni *meno regolari* rispetto a quella di partenza. Si pensi per esempio all'integrale e alla derivata della funzione $|x|$: se da un lato l'integrale è liscio, poiché fa sparire il punto angoloso, la derivata presenta un punto di discontinuità, che abbatte la regolarità al punto da ridurre il dominio. Al fine di aiutare a visualizzare questo concetto, la Fig. 1 riporta $f(x) = |x|$ (curva blu), la sua derivata $f'(x)$ (curva rossa) e la sua funzione integrale $F(x)$ (curva verde). Si noti che non ha senso valutare la derivata $f'(x)$ in $x = 0$, come enfatizzato. Questa figura è ottenuta a partire dallo script MATLAB®:

Script usato per disegnare i grafici di Fig. 1.

```
clear
close all
clc

x=linspace(-5,5,100001);
f=abs(x);
fder=sign(x);
fint=sign(x).*x.^2;

figure
grid on
hold on
box on
axis equal
plot(x,f,'-',x,fder,'-',x,fint,'-','LineWidth',2)
axis([-2,2,-2,2])
xlabel('x')
legend('f(x)','f''''(x)','F(x)','Location','Best')
```

nel quale vengono disegnate le espressioni esplicite

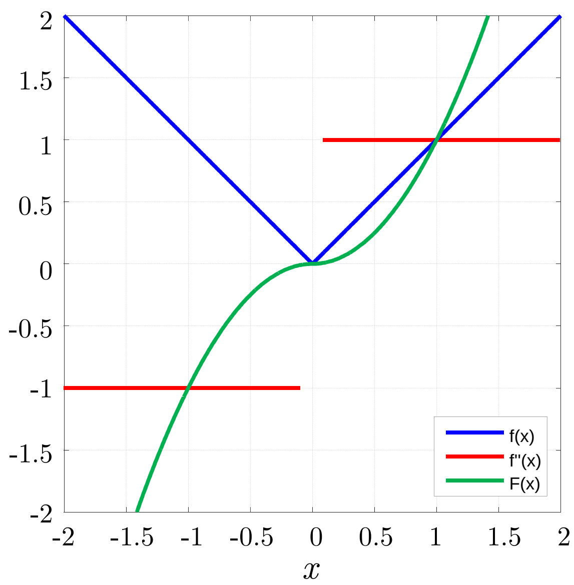

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = |x|$ (curva blu), della sua derivata $f'(x)$ (curva rossa) e del suo integrale $F(x)$ (curva verde), le cui espressioni sono riportate in (2). Si noti come la derivazione esalti il punto angoloso trasformandolo in una discontinuità, mentre l'integrazione d'altro canto tenda a mascherarlo facendolo degenerare in un flesso.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= |x| \\
f'(x) &= \operatorname{sign} x \\
F(x) &= x^2 \operatorname{sign} x.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Si ricordi che nel corso di Analisi Matematica I si parla spessissimo di funzioni derivabili, ma quasi mai di funzioni integrabili. Questo è dovuto al fatto che le funzioni integrabili costituiscono un insieme molto più vasto delle derivabili, e quindi la derivabilità è una condizione meno *scontata* da possedere per una funzione; in altre parole, una funzione derivabile è integrabile, ma il viceversa non è necessariamente vero. Il problema dell'esercizio (1) è di natura più, diciamo, *operativa*: non siamo capaci di scrivere, in termini di funzioni elementari (prodotti, frazioni, potenze, seni, coseni, esponenziali, logaritmi e via discorrendo) la primitiva della funzione integranda. Tuttavia, poiché la funzione è assolutamente regolare, da un punto di vista **numerico** questo problema è assolutamente standard.
Ispirati da un *leitmotiv* che riecheggia nelle aule, potremmo chiederci

> «Perché nel 2018 devo imparare a risolvere tutti questi integrali, quando me li può fare un computer?!?»

Questa domanda sarà un po' tracotante, ma può aiutarci a spiegare in maniera un po' folkloristica quale sarà lo scopo di questo corso. L'obiettivo del Calcolo Numerico è far *digerire* un problema matematico a un computer, riducendolo ad algoritmi, a passi elementari. Per quanto un computer possa essere svelto a fare conti, ovvero operazioni aritmetiche elementari, non è certamente uno strumento in grado di *capire* un problema e risolverlo. Per questo motivo, saremo noi a *digerire* alcuni problemi al posto del computer, che svolgerà un ruolo di supporto nei nostri confronti, risolvendo velocemente le operazioni in cui è senz'altro più bravo.

Vorrei approfittare di questa introduzione per augurare agli eventuali lettori di queste note una buona lettura, sperando che possa in qualche modo stuzzicare il loro interesse verso questa materia.