

*Lecture*  
**8\_6.1**

# **Alberi (Trees)**



**Paolo PRINETTO**

Politecnico di Torino (Italy)  
Univ. of Illinois at Chicago, IL (USA)  
CINI Cybersecurity Nat. Lab. (Italy)

[Paolo.Prinetto@polito.it](mailto:Paolo.Prinetto@polito.it)

[www.consorzio-cini.it](http://www.consorzio-cini.it)  
[www.comitato-girotondo.org](http://www.comitato-girotondo.org)

## ***License Information***

**This work is licensed under the  
Creative Commons BY-NC  
License**



To view a copy of the license, visit:  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/legalcode>

# ***Disclaimer***

- We disclaim any warranties or representations as to the accuracy or completeness of this material.
- Materials are provided “as is” without warranty of any kind, either express or implied, including without limitation, warranties of merchantability, fitness for a particular purpose, and non-infringement.
- Under no circumstances shall we be liable for any loss, damage, liability or expense incurred or suffered which is claimed to have resulted from use of this material.

# *Goal*

- This lecture aims at presenting the ADT *Tree*, the related operations, and the visiting techniques.

# *Prerequisites*

- **none**

## *Further readings*

- Students interested in a deeper look at the covered topics can refer, for instance, to the books listed at the end of the lecture.

# *Outline*

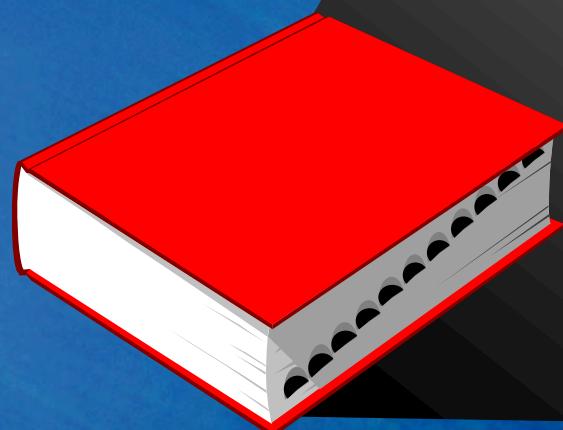
- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario

# *Outline*

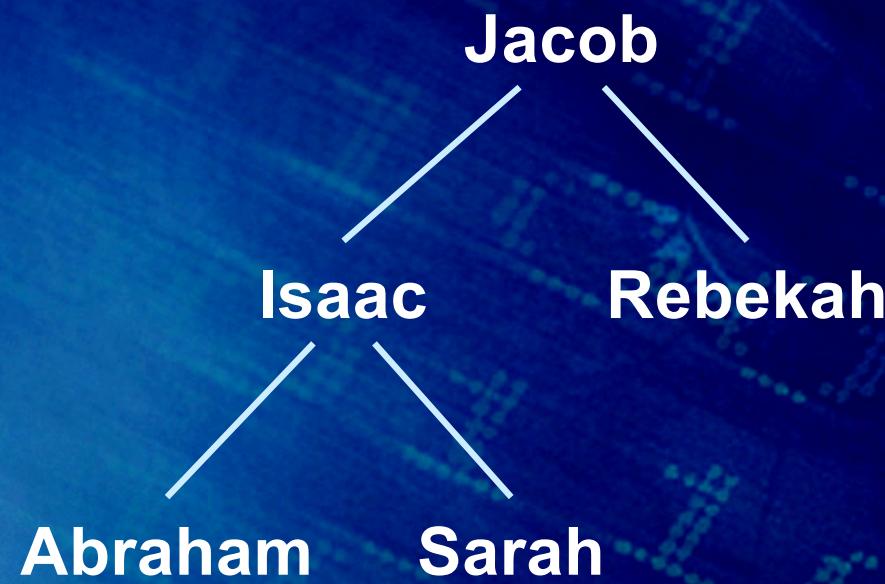
- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario

# **Albero - Tree**

***Struttura dati utilizzata per memorizzare un insieme di elementi tra i quali sia possibile stabilire una relazione gerarchica***



# *Esempio: Alberi Genealogici*

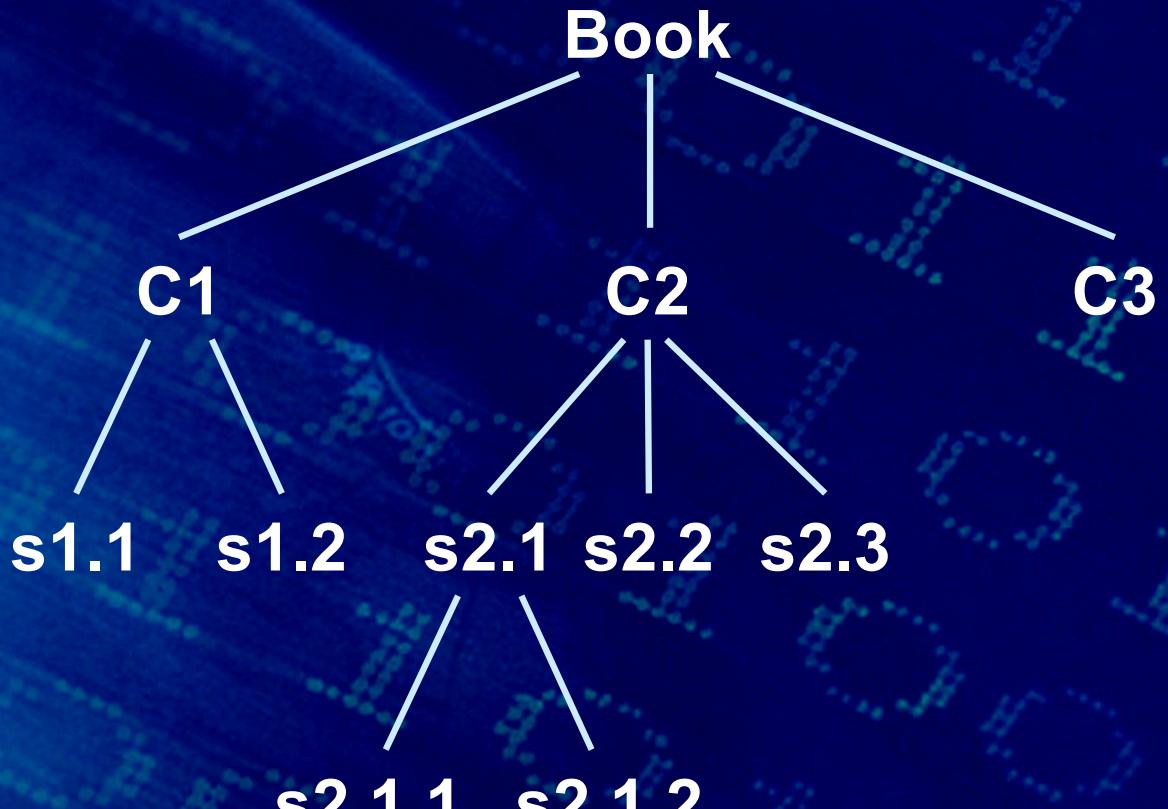


# *Esempio: Indici*

- Book
  - C1
    - . s1.1
    - . s1.2
  - C2
    - . s2.1
      - s2.1.1
      - s2.1.2
    - . s2.2
    - . s2.3
  - C3

# *Esempio: Indici*

- Book
  - C1
    - . s1.1
    - . s1.2
  - C2
    - . s2.1
      - s2.1.1
      - s2.1.2
    - . s2.2
    - . s2.3
  - C3



# *Albero: Definizione Formale*

Un albero è una coppia ordinata **(V, E)** di insiemi:

- **V** è un insieme finito e non vuoto di oggetti, denominati **nodi**, tra i quali esiste una qualche relazione (**parentela**).

Un nodo viene distinto dagli altri e prende il nome di **radice**.

- **E** è un insieme di archi. Ciascun arco unisce due nodi.

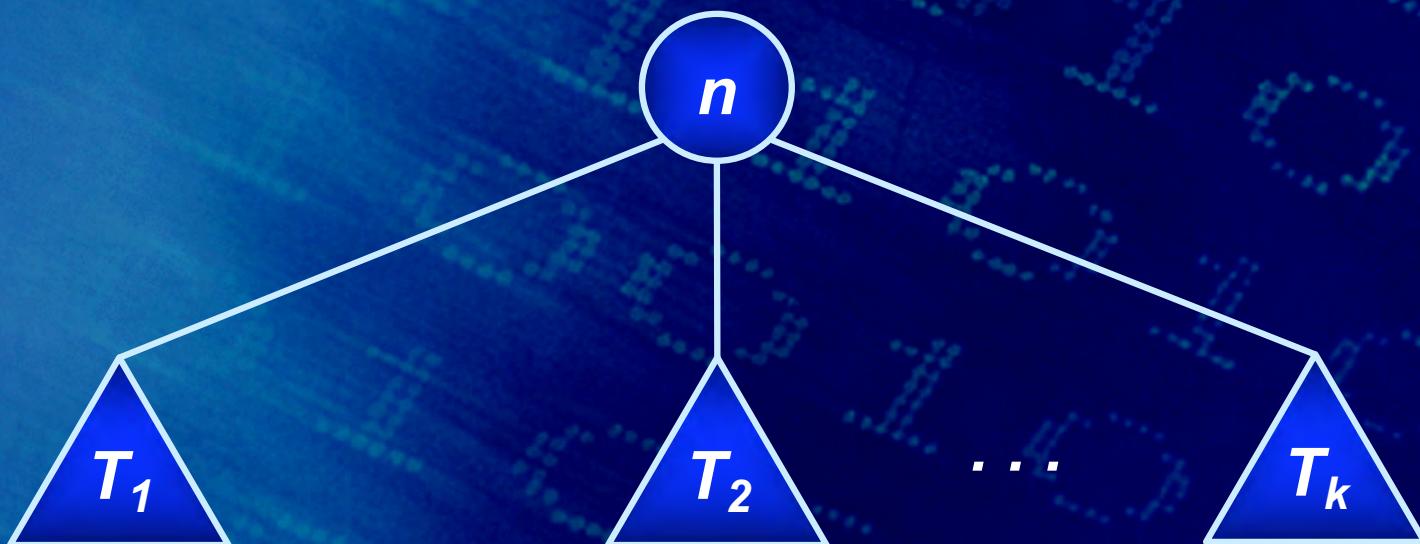
# *Struttura dei nodi*

**In ogni nodo vengono normalmente memorizzati:**

- **uno degli elementi dell'insieme**
- **informazioni necessarie a memorizzare la struttura dell'albero.**

# **Albero: Definizione Assiomatica**

- Un singolo nodo è di per sé un albero
- Supponendo che  $n$  sia un nodo e che  $T_1, T_2, \dots, T_k$  siano alberi con radici  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , è possibile costruire un nuovo albero facendo in modo che  $n$  sia il padre di  $n_1, n_2, \dots, n_k$



# Albero: Definizione Assiomatica

- Un singolo nodo.
- Supponendo che i nodi siano alberi, è possibile costruire un nuovo albero sia il padre sia i figli.

*In questo nuovo albero:*

- $n$  è la radice
- $T_1, T_2, \dots, T_k$  sono i sottoalberi della radice.



# *Padre - Figlio*

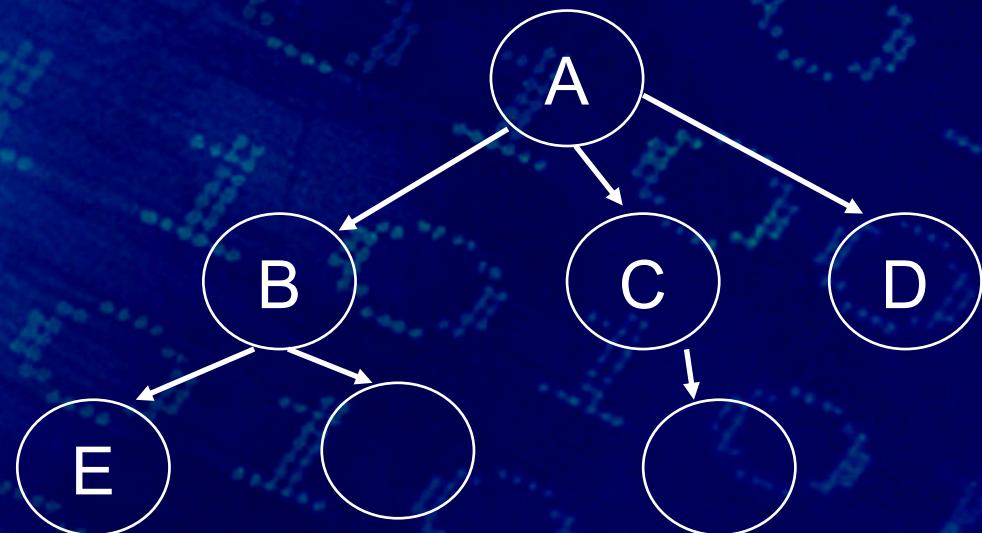
- Se esiste un arco che collega il nodo *a* e il nodo *b*, allora:
  - *a* è il **padre** di *b*
  - *b* è un **figlio** di *a*.

# *Padre - Figlio*

- Se esiste un arco che collega il nodo *a* e il nodo *b*, allora:
  - *a* è il **padre** di *b*
  - *b* è un **figlio** di *a*.

A ha 3 figli: B, C, D

A è il padre di B



# **Cammino (Path)**

**Cammino da un nodo  $n_1$  a un nodo  $n_k$  è una sequenza di nodi:**

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

tali che

- $n_{j+1}$  è un figlio di  $n_j$        $\forall j : 1 \leq j < k$

## *Ascendente - Discendente*

- Se esiste un cammino tra il nodo  $a$  e il nodo  $b$ , allora:
  - $a$  è un **ascendente (ancestor)** di  $b$
  - $b$  è un **discendente (descendant)** di  $a$ .

## *Teorema*

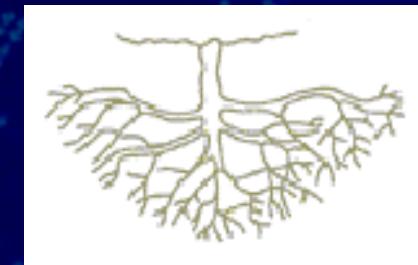
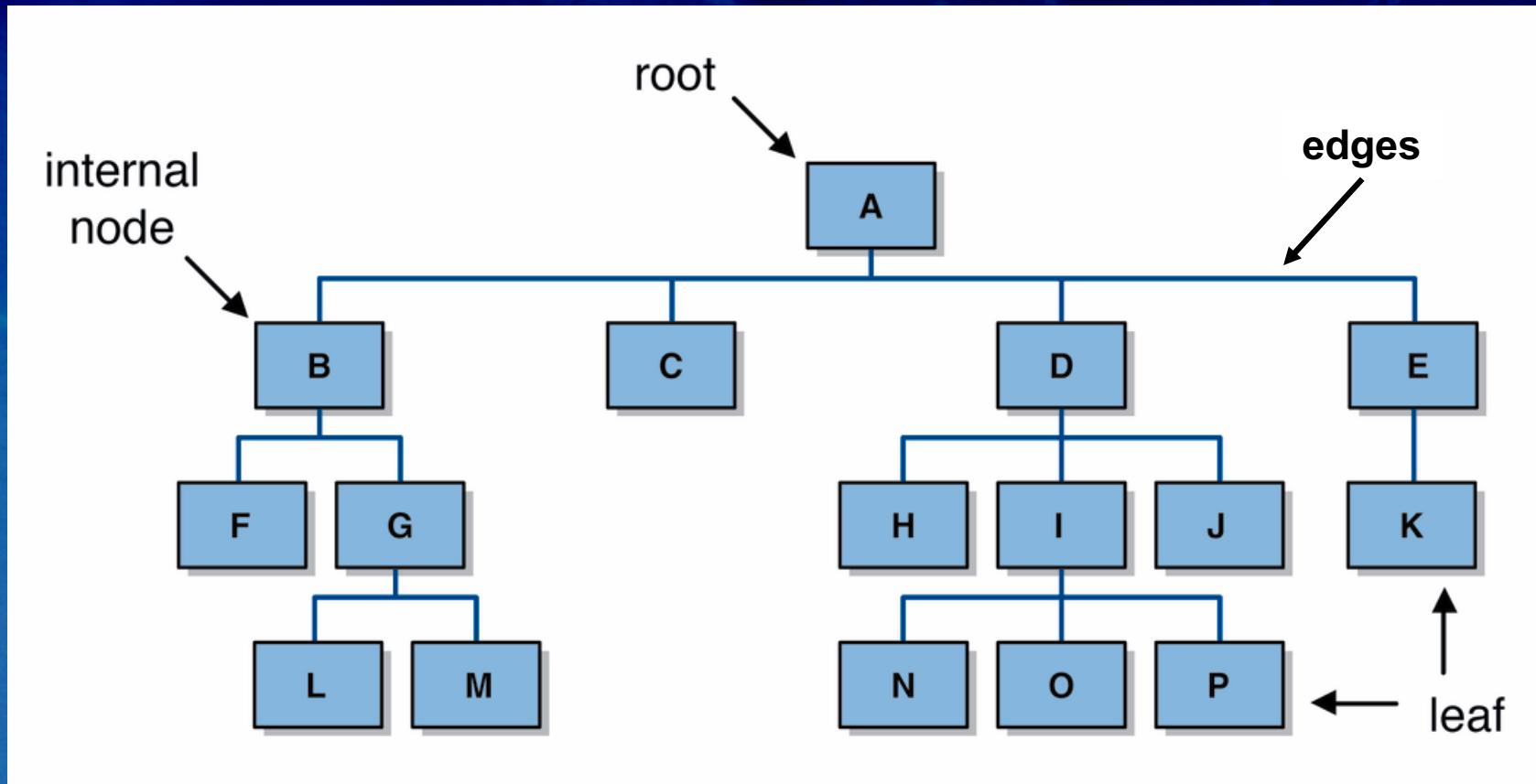
**Se esiste un cammino  
tra il nodo a e il nodo b,  
tale cammino è unico**



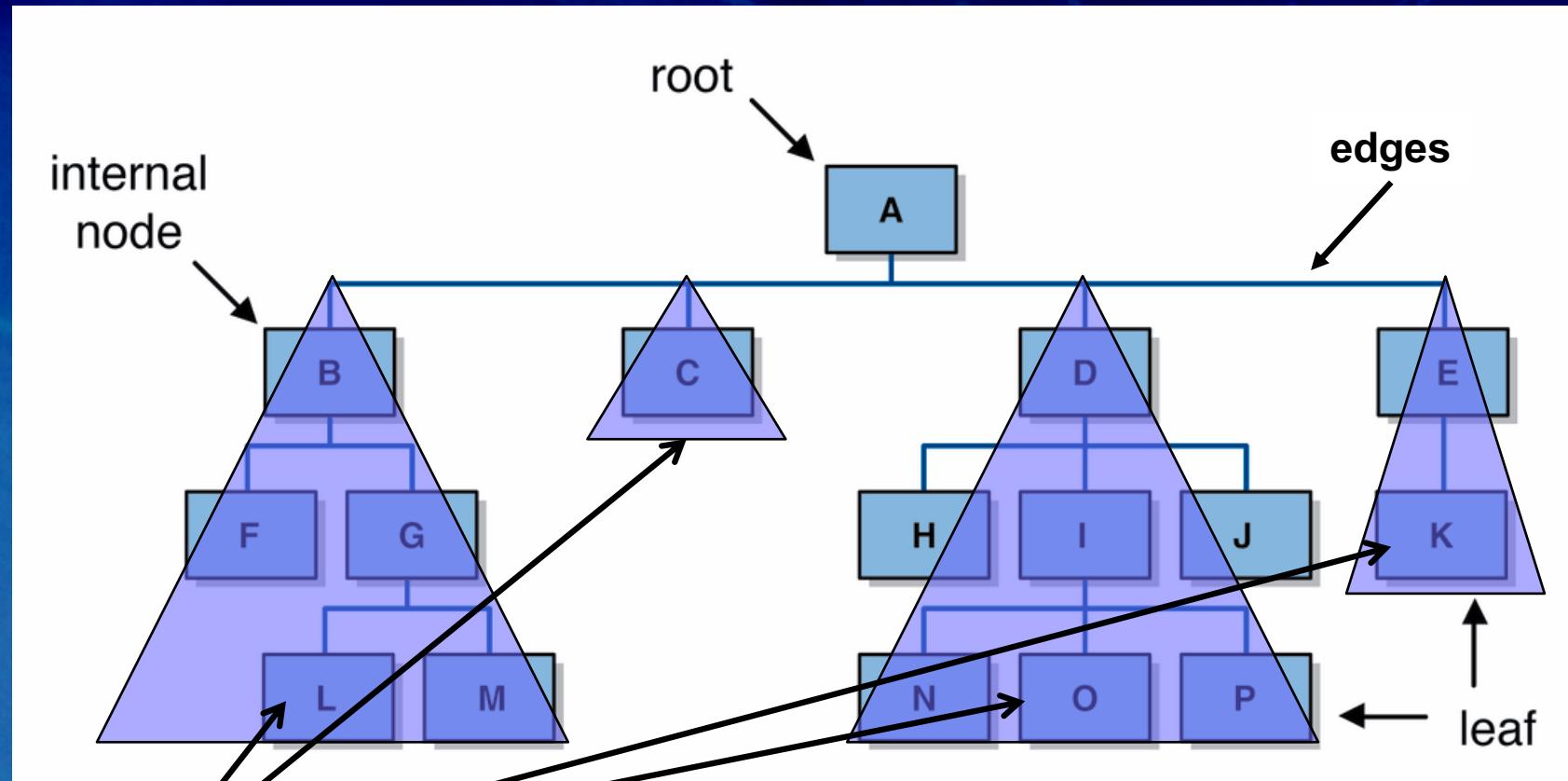
# *Ulteriori Definizioni*

- **Foglia (leaf)**
  - Un nodo senza discendenti è detto **foglia**, o **nodo terminale**
- **Nodo interno**
  - Un nodo con discendenti è detto **nodo interno**, o **intermedio**

# Tree diagram



# Tree diagram



Subtrees



# *Profondità (Depth)*

La **profondità** di un nodo è la lunghezza dell'unico cammino esistente tra la radice e il nodo

La radice ha profondità 0

# **Altezza (height)**

- **Altezza di un nodo** è la lunghezza del massimo cammino da quel nodo a una foglia.
- **Altezza di un albero** è l'altezza della radice.

Nel caso in cui tutte le foglie abbiano la stessa profondità e l'altezza dell'albero sia  $H$ , per ogni nodo  $i$  si ha:

$$p(i) + h(i) = H$$

dove:

- $p(i)$  : profondità del nodo  $i$
- $h(i)$  : altezza del nodo  $i$ .

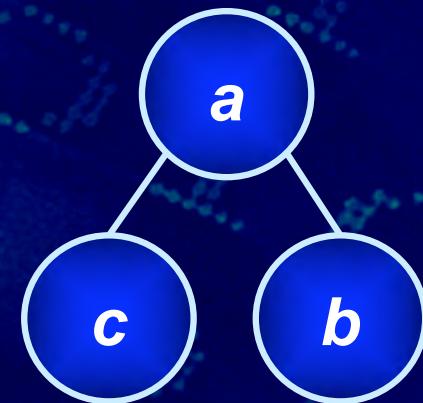
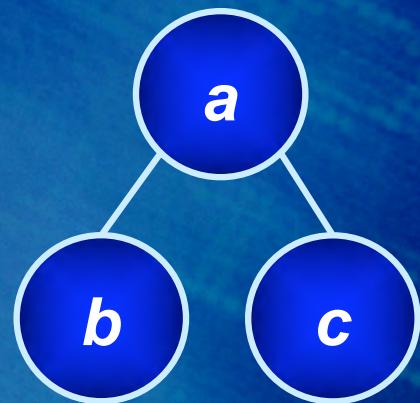
# **Grado**

- **Grado di un nodo** è il numero dei discendenti diretti (figli) di quel nodo.
- **Grado di un albero** è il massimo grado dei suoi nodi.
- Un albero di grado 2 viene detto **albero binario**.

# *Ordine*

Solitamente i figli di un nodo sono *ordinati* da sinistra a destra

Esempio di alberi diversi:



# *Outline*

- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario

# *Operazioni sugli alberi*

**Tra le molteplici operazioni che si possono eseguire sugli alberi, le più significative sono le seguenti:**

## *parent(n, T)*

Ritorna:

- il padre del nodo  $n$  nell'albero  $T$
- il nodo nullo se  $n$  è la radice



## *leftmost\_child( $n, T$ )*

Ritorna:

- il figlio più a sinistra del nodo  $n$  nell'albero  $T$
- il nodo nullo se  $n$  è una foglia

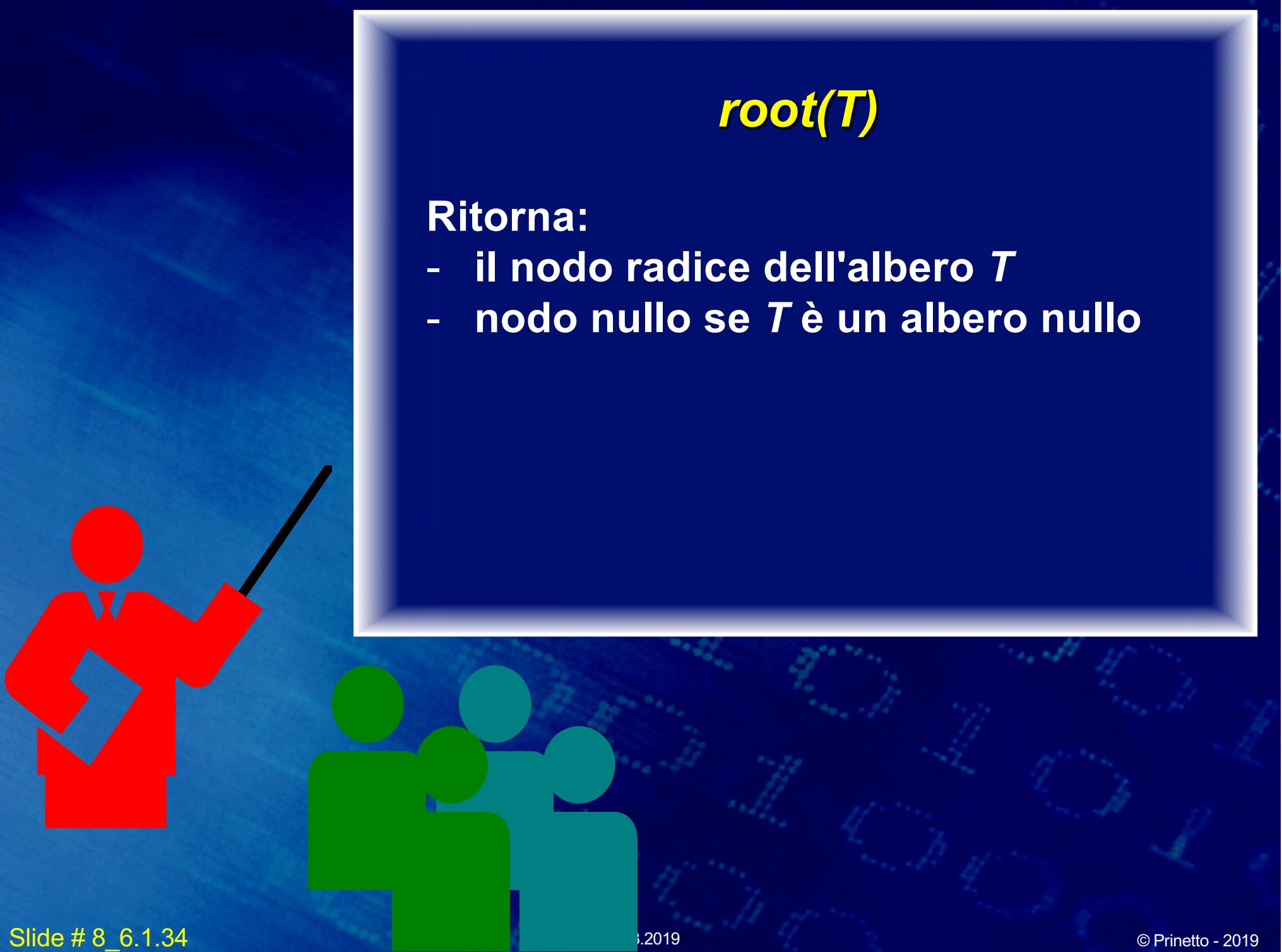


## *right\_sibling*( $n, T$ )

# Ritorna:

- il fratello di destra del nodo  $n$  nell'albero  $T$
  - il nodo nullo se non esiste





$\text{root}(T)$

Ritorna:

- il nodo radice dell'albero  $T$
- nodo nullo se  $T$  è un albero nullo



***makenull( $T$ )***

Trasforma l'albero  $T$  in un albero  
nullo

***Create\_node(v, T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, ..., T<sub>k</sub>)***

Crea un nuovo nodo  $r$  con label  $v$  e  
 $k$  figli, radici dei sottoalberi  
 $T_1, T_2, \dots, T_k$ .

Ritorna l'albero avente radice  $r$



## *Delete\_node( $n, T$ )*

Cancella il nodo  $n$  nell'albero  $T$

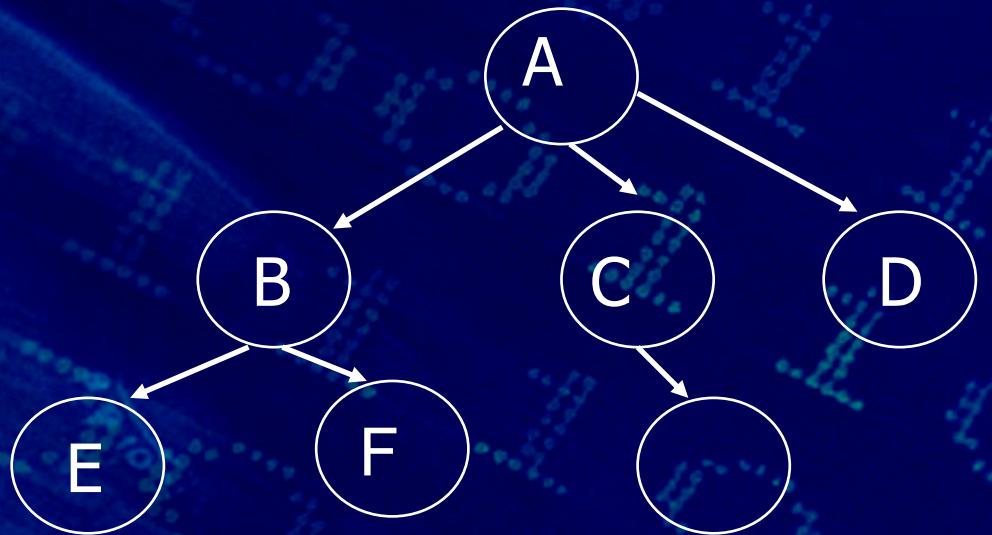
Ritorna:

Il nuovo albero  $T$  privo del nodo  $n$  se  
la cancellazione è stata possibile;  
Altrimenti ERROR



# *Deleting a node*

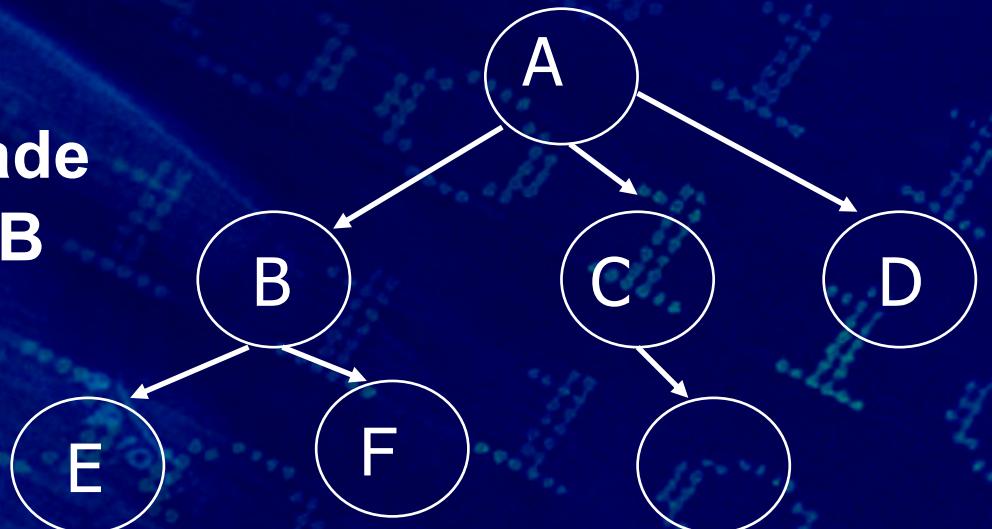
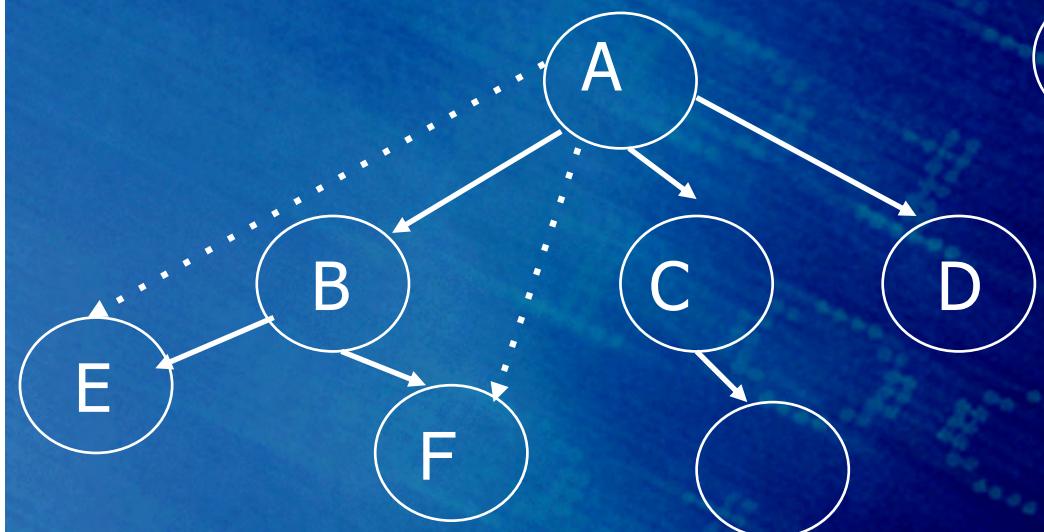
**Deletion of a child B**



# *Deleting a node*

**Deletion of a child B:**

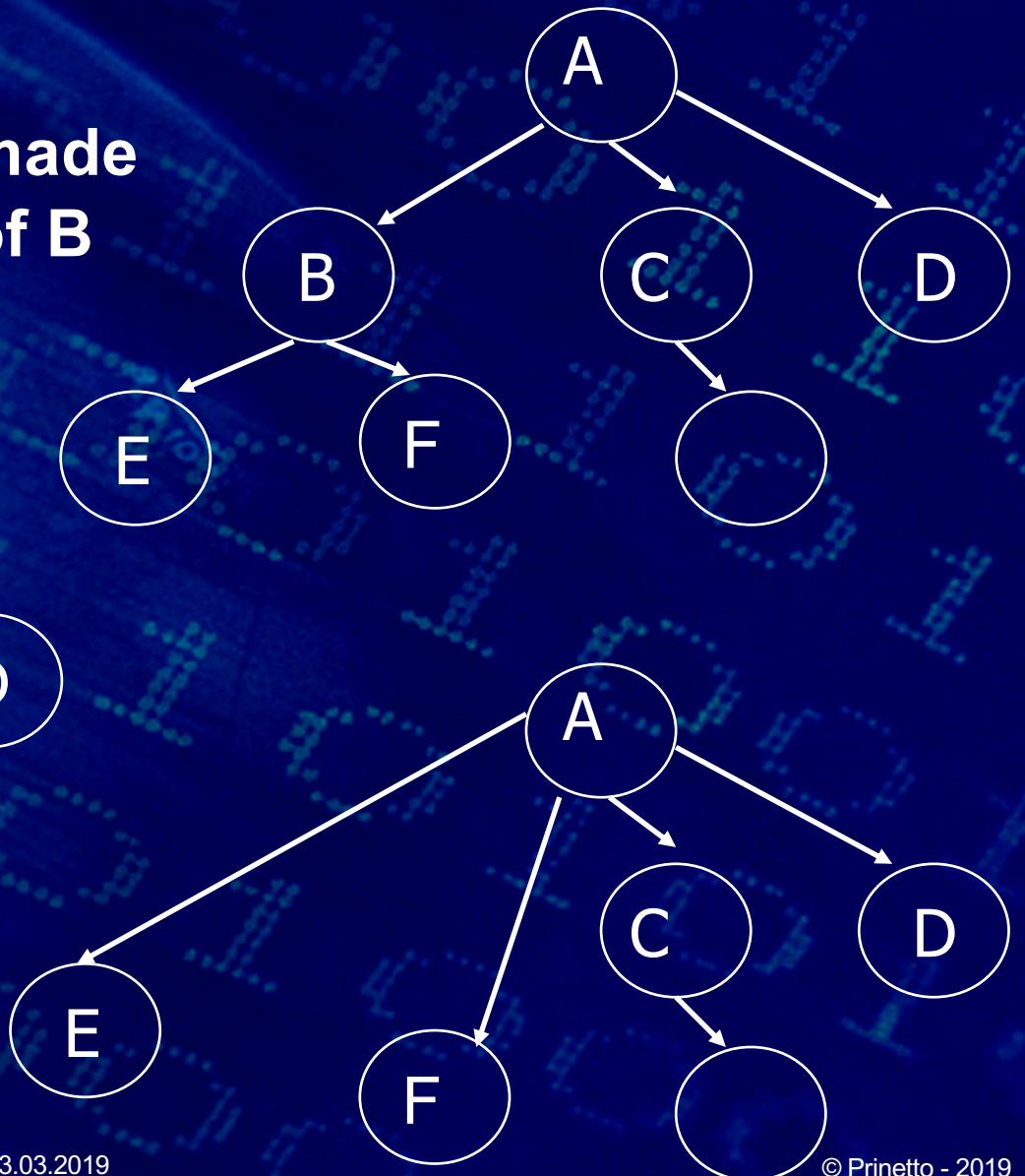
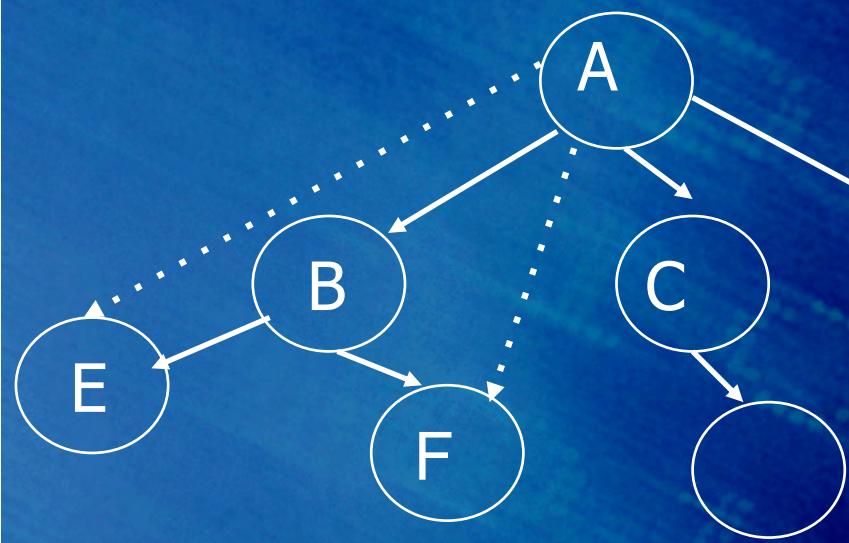
- Children of B are first made children of the parent of B



# *Deleting a node*

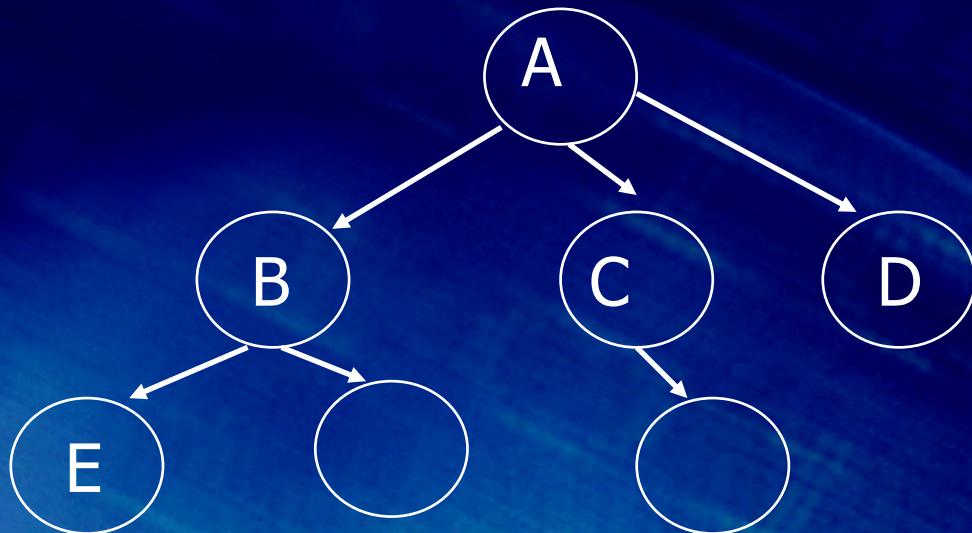
**Deletion of a child B:**

- Children of B are first made children of the parent of B
- Node B is deleted.



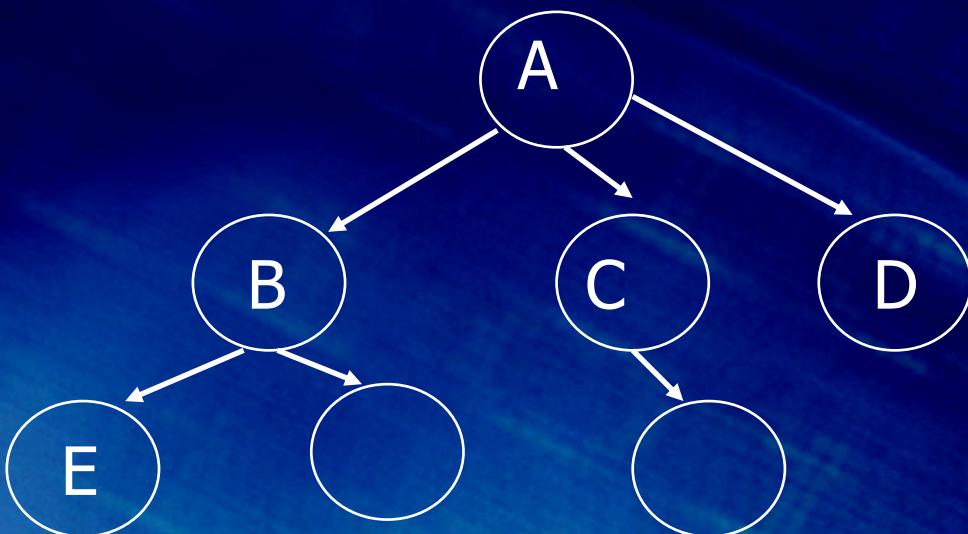
# ***Deleting the root***

- One of the children becomes the new root
- Other children of old root become the children of the new root



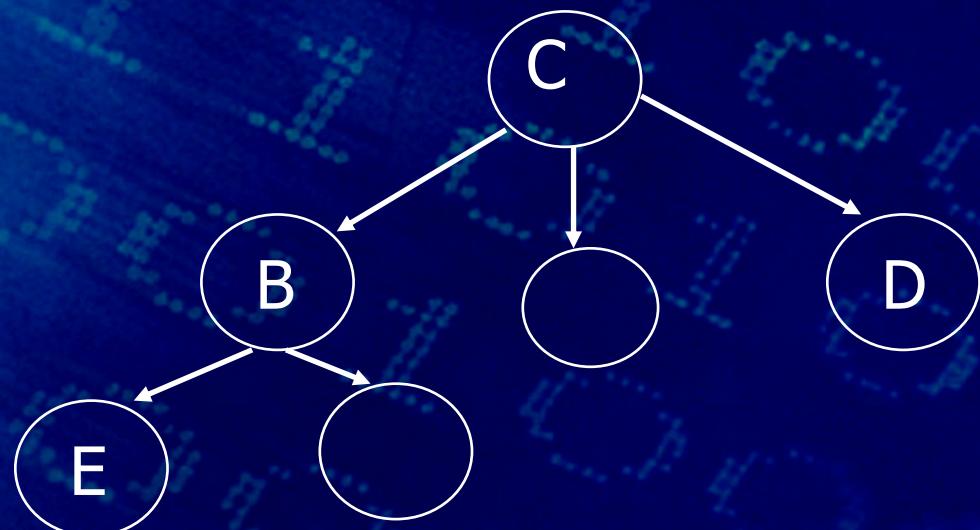
C becomes new root

B and D are children of C in addition to its original child



C becomes new root

B and D are children of C in addition to its original child



# *Outline*

- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario

# *Rappresentazione degli Alberi*

**Sono possibili soluzioni diverse:**

- **tramite vettore**
- **tramite liste dei figli**
- **tramite liste multiple.**

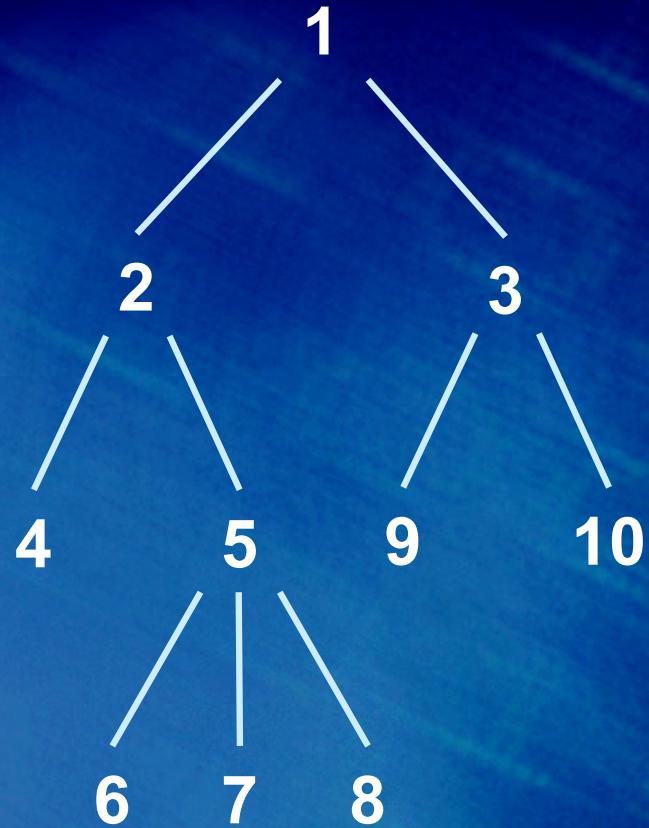
**La scelta di una determinata rappresentazione sarà principalmente determinata dall'insieme delle operazioni da effettuare.**

## *Rappresentazione tramite vettore*

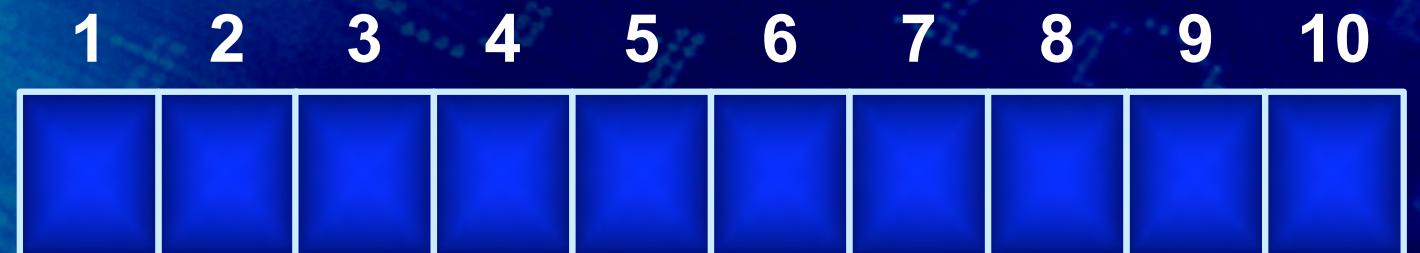
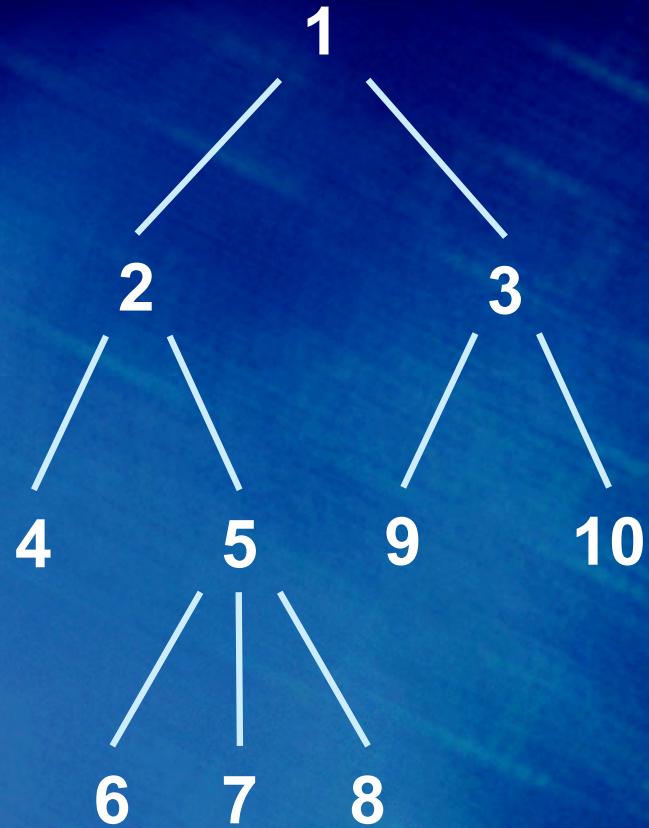
**Se il numero  $m$  di nodi è noto a priori, è possibile memorizzare in ciascuna cella di un vettore di  $m$  elementi il puntatore al padre del nodo cui l'elemento è associato.**

**I nodi vengono solitamente numerati per livello, dalla radice verso le foglie e da sinistra verso destra.**

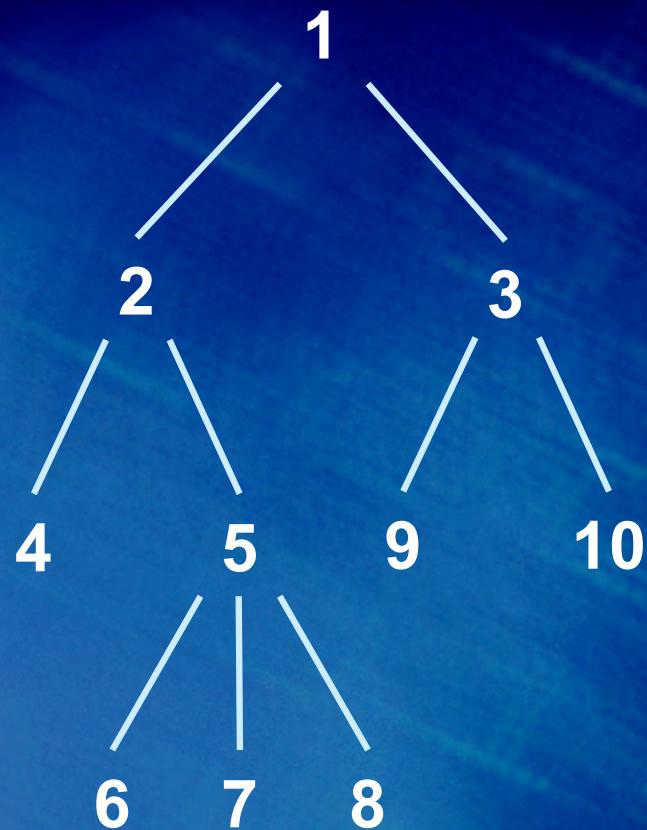
# Rappresentazione tramite vettore: Esempio



# Rappresentazione tramite vettore: Esempio



# Rappresentazione tramite vettore: Esempio



# *Rappresentazione tramite vettore: Vantaggi e Svantaggi*

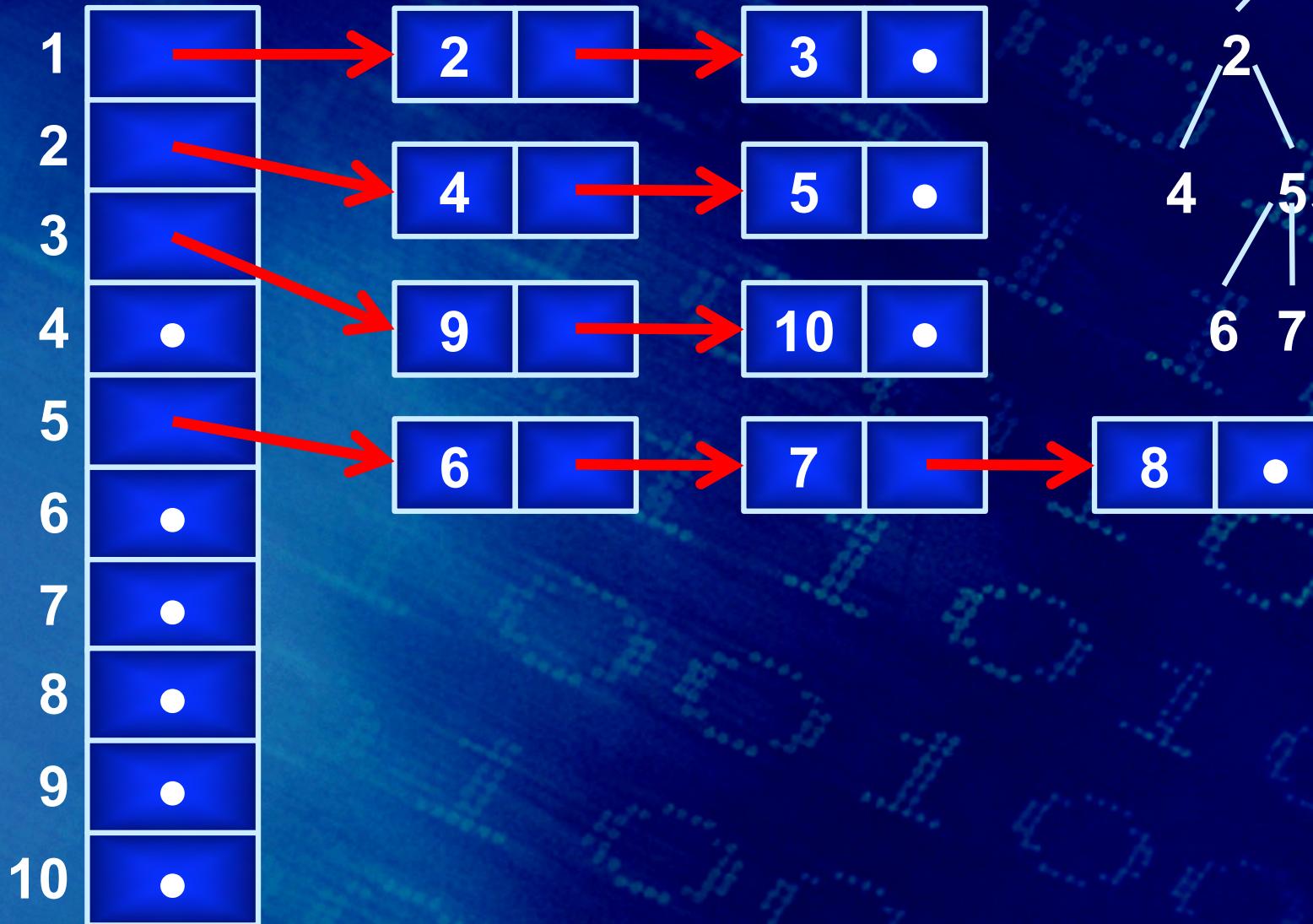
Dato un nodo,

- la determinazione del padre è immediata
- risulta particolarmente disagevole la determinazione sia dei figli sia dei fratelli.

## ***Rappresentazione tramite liste dei figli***

**Un vettore, avente tante celle quante sono i nodi dell'albero, contiene i puntatori alle liste dei figli di ciascun nodo.**

# Rappresentazione tramite liste dei figli: Esempio

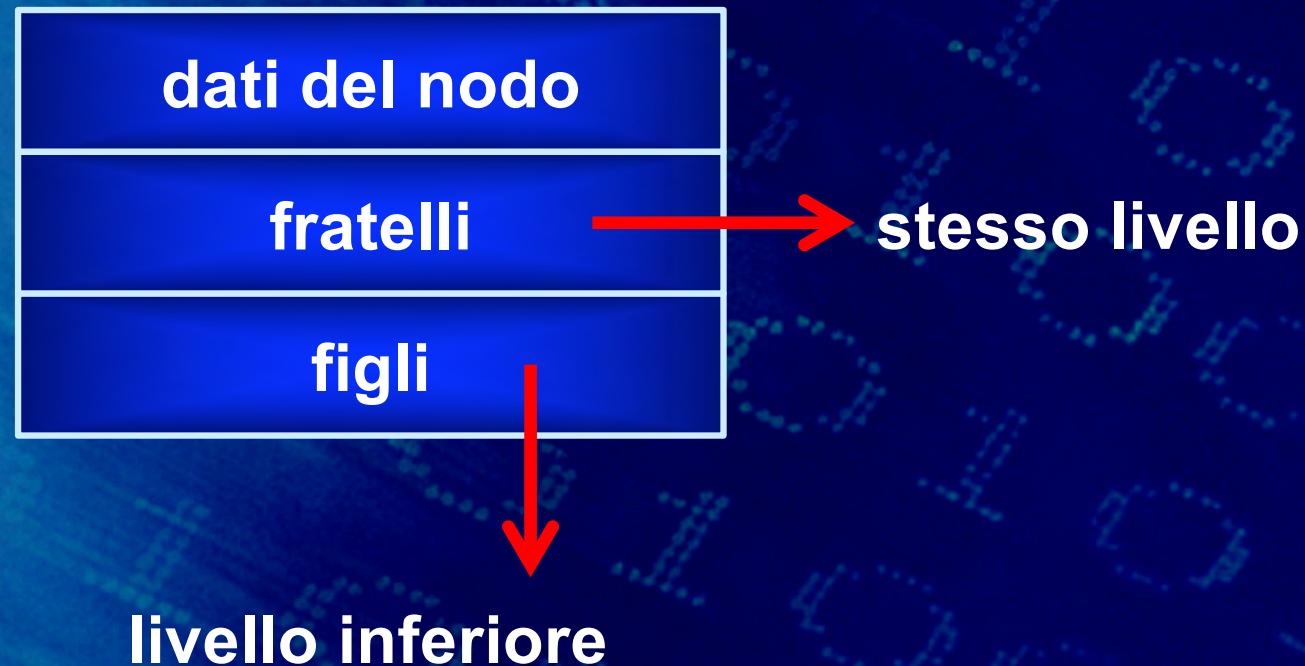


# *Rappresentazione tramite liste dei figli: Vantaggi e Svantaggi*

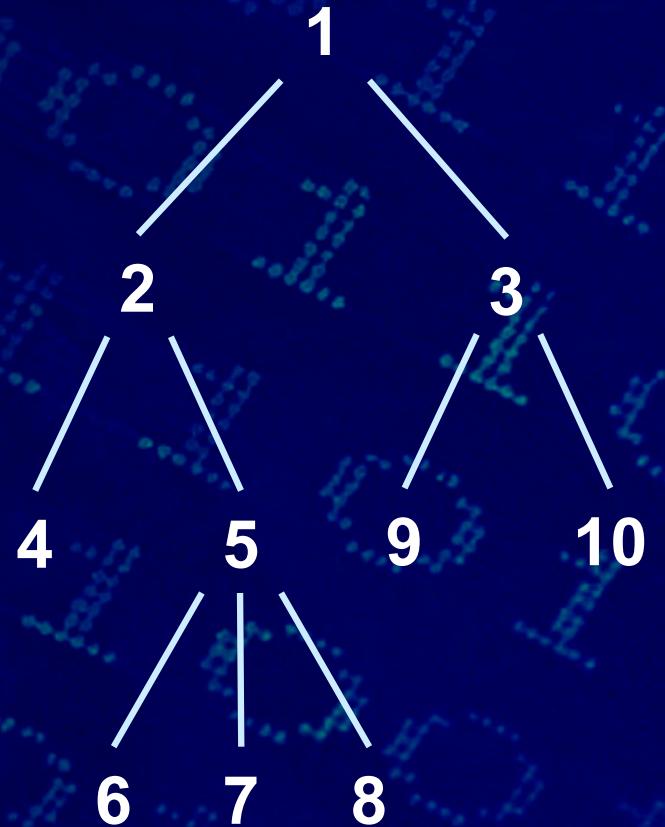
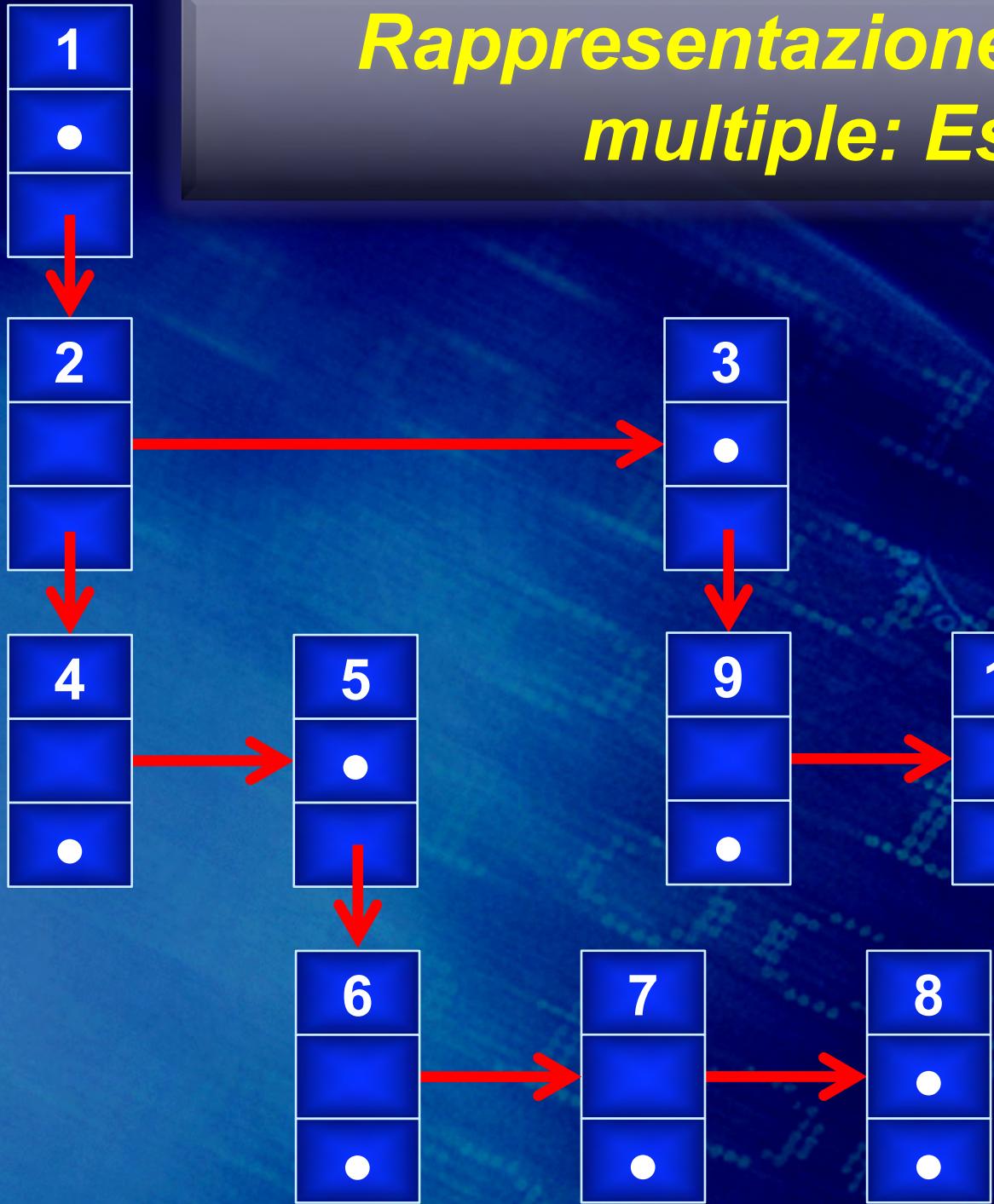
Dato un nodo, risulta particolarmente disagevole la determinazione del padre.

# *Rappresentazione tramite liste multiple*

- Si può ricorrere a una lista multipla, in cui ciascun elemento contiene due puntatori: uno al figlio più a sinistra e uno al fratello di destra.



# Rappresentazione tramite liste multiple: Esempio



# *Rappresentazione tramite liste multiple: Vantaggi e Svantaggi*

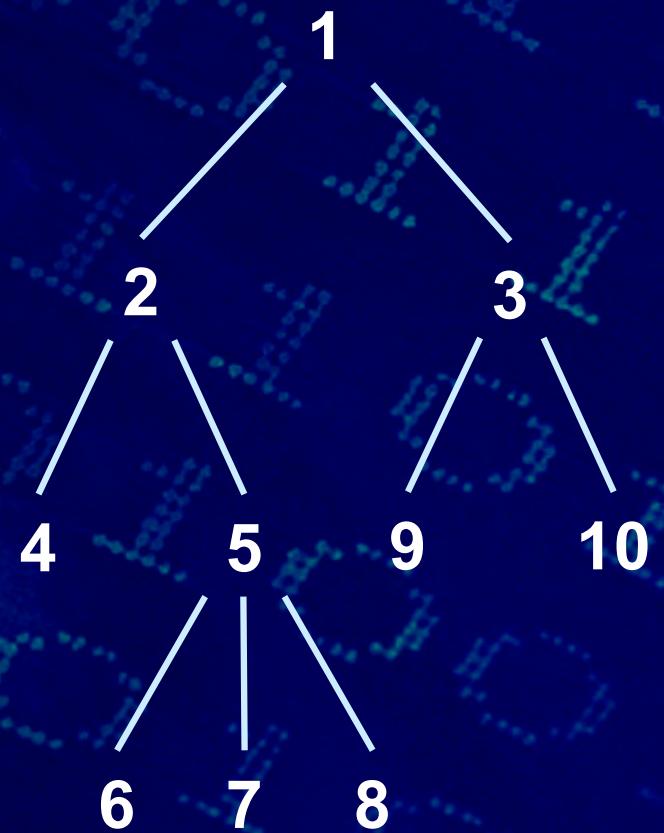
Dato un nodo, risulta particolarmente disagevole la determinazione del padre.

# Rappresentazione completa

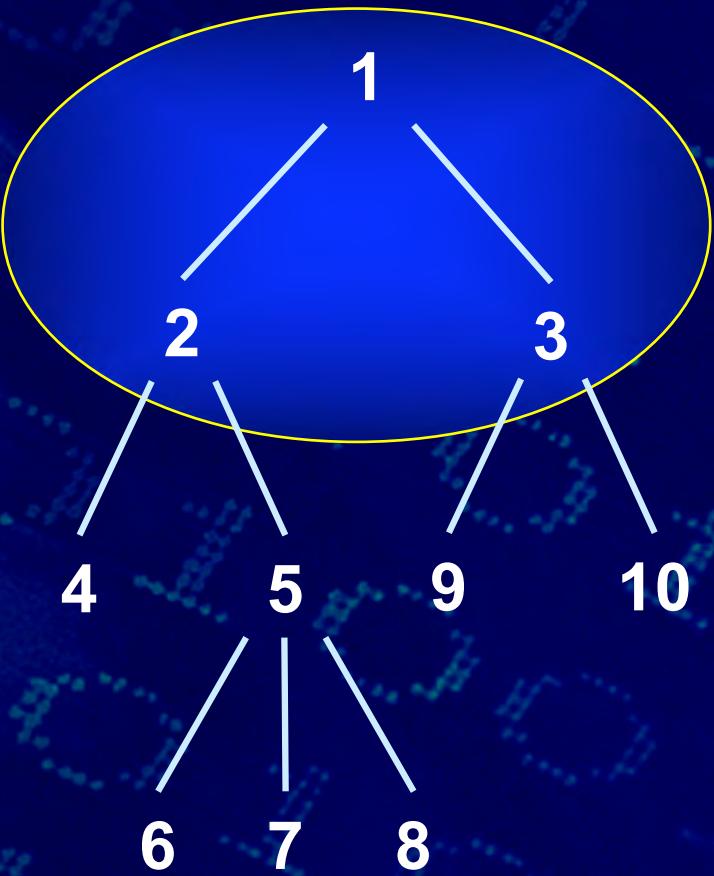
Per agevolare la determinazione del padre è possibile aggiungere a ciascun elemento della lista un puntatore al nodo padre.



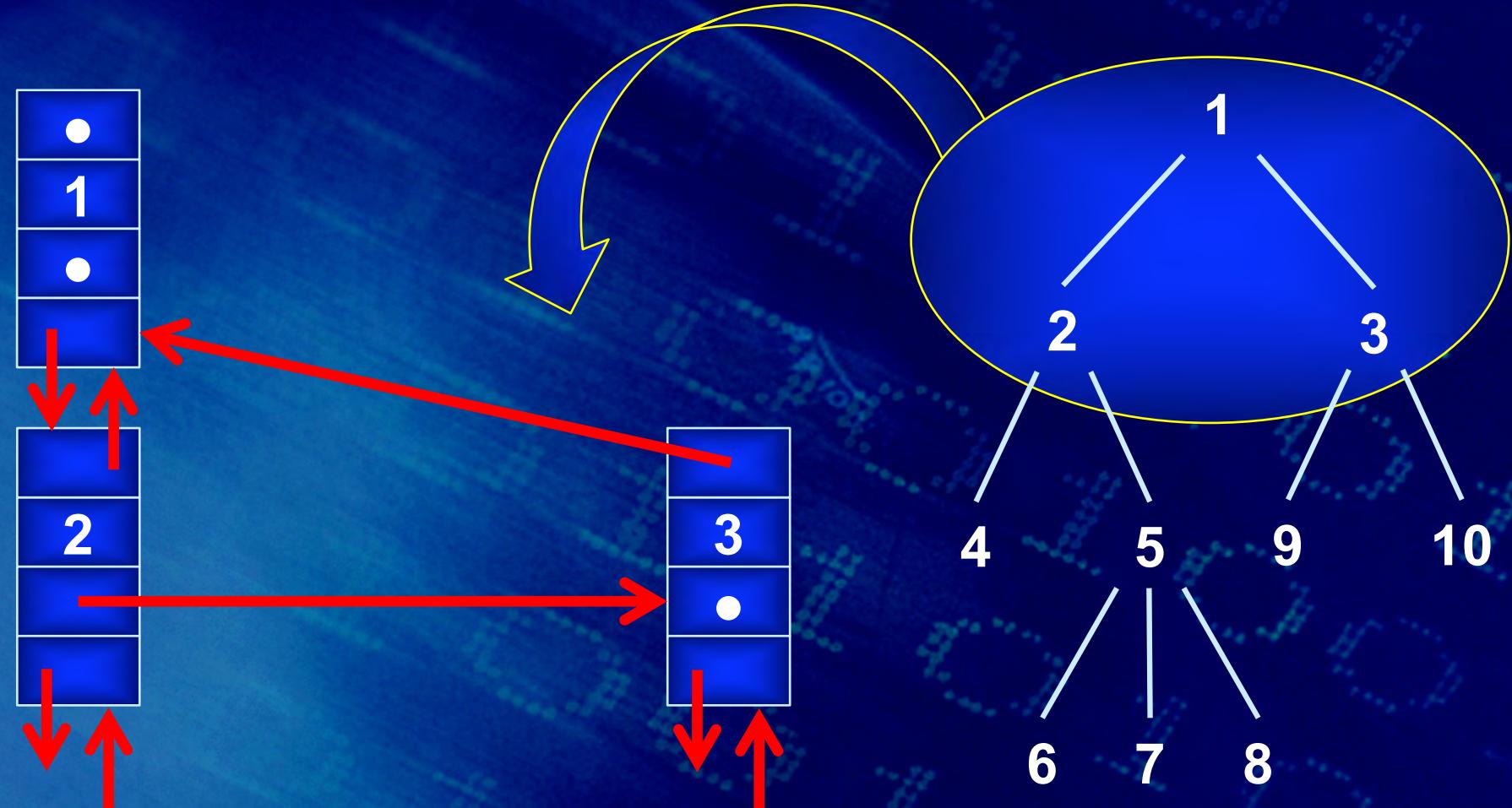
# *Rappresentazione completa: Esempio*



# *Rappresentazione completa: Esempio*



# Rappresentazione completa: Esempio



# *Outline*

- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario

# *Alberi Binari*

Gli **alberi binari** (o **binary tree**) sono alberi di grado 2,  
vale a dire tali che ciascun nodo può avere:

- nessun figlio
- un figlio *sinistro*
- un figlio *destro*
- sia un figlio *sinistro* sia un figlio *destro*.

## *Alberi Binari* (cont'd)

**La distinzione tra sinistra e destra per i figli di un nodo può essere estesa a nodi che non sono legati da relazione ancestor-descendant.**

**Regola fondamentale:**

- **Se  $a$  e  $b$  sono fratelli e  $a$  è alla sinistra di  $b$ , allora tutti i discendenti di  $a$  sono alla sinistra di tutti i discendenti di  $b$ .**

## *Alberi Binari* (cont'd)

**Regola pratica:**

- **Dato un nodo  $n$ , per trovare i nodi alla sua sinistra e alla sua destra basta percorrere il cammino che va da  $n$  alla radice; tutti i nodi che si dipartono dalla sinistra (e i loro eventuali discendenti) si trovano a sinistra di  $n$ .**

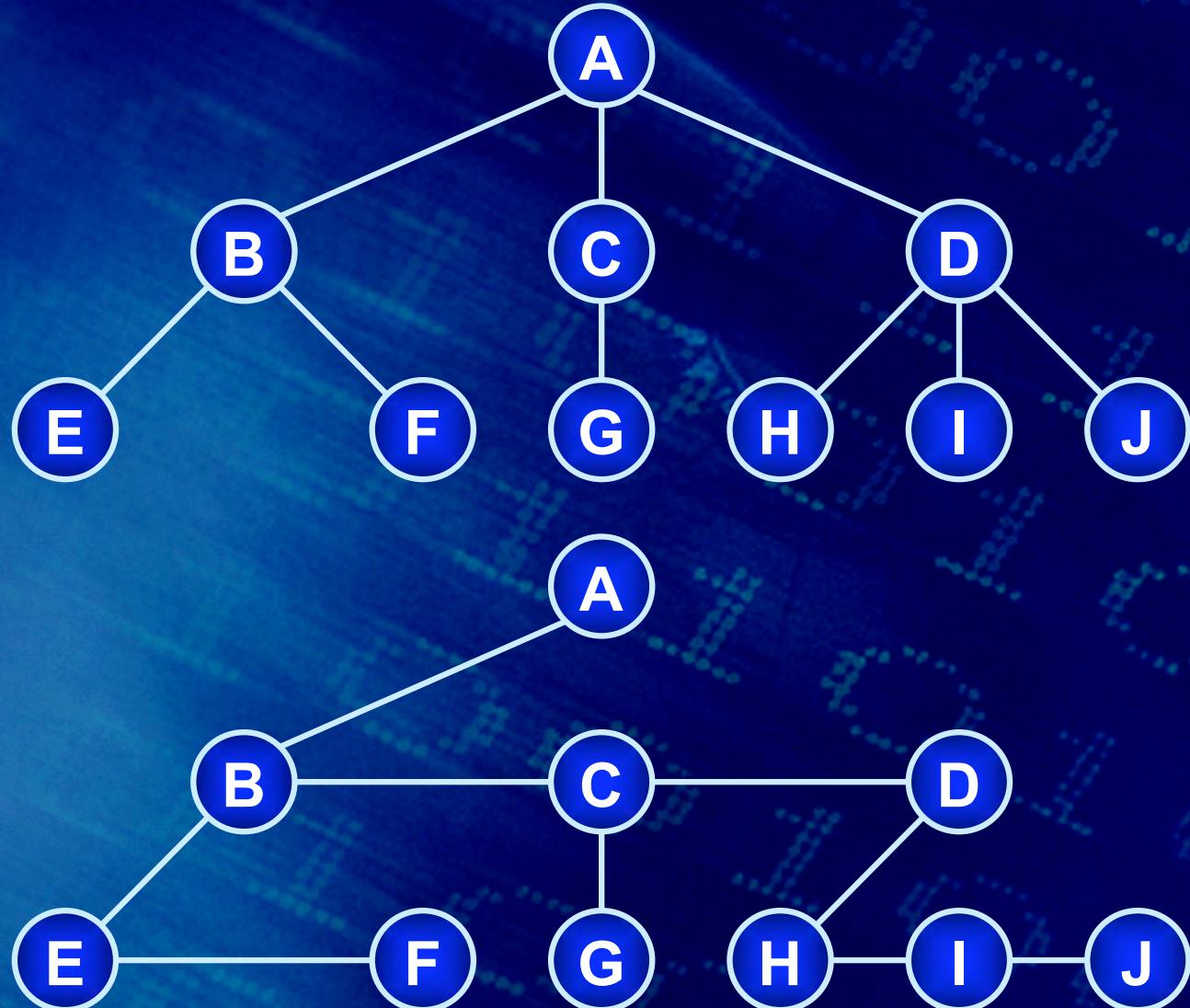
**Discorso analogo vale per la destra.**

# **Trasformazione alberi binari/alberi normali**

**Qualunque albero può essere trasformato in un albero binario equivalente, e viceversa.**

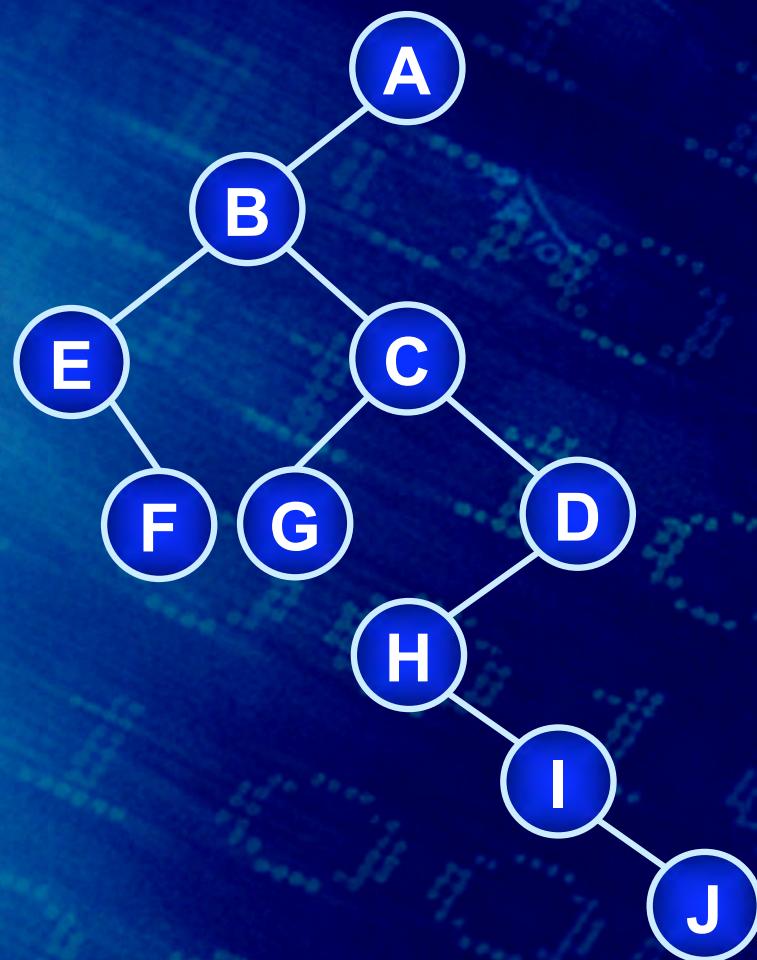
- **Trasformazione normale → binario**
  - per ogni nodo, si collegano tutti i figli di tale nodo
  - si cancellano tutti i rami dal nodo in esame ai suoi figli, eccetto quello con il figlio più a sinistra.

## *Da alberi normali ad alberi binari: esempio*



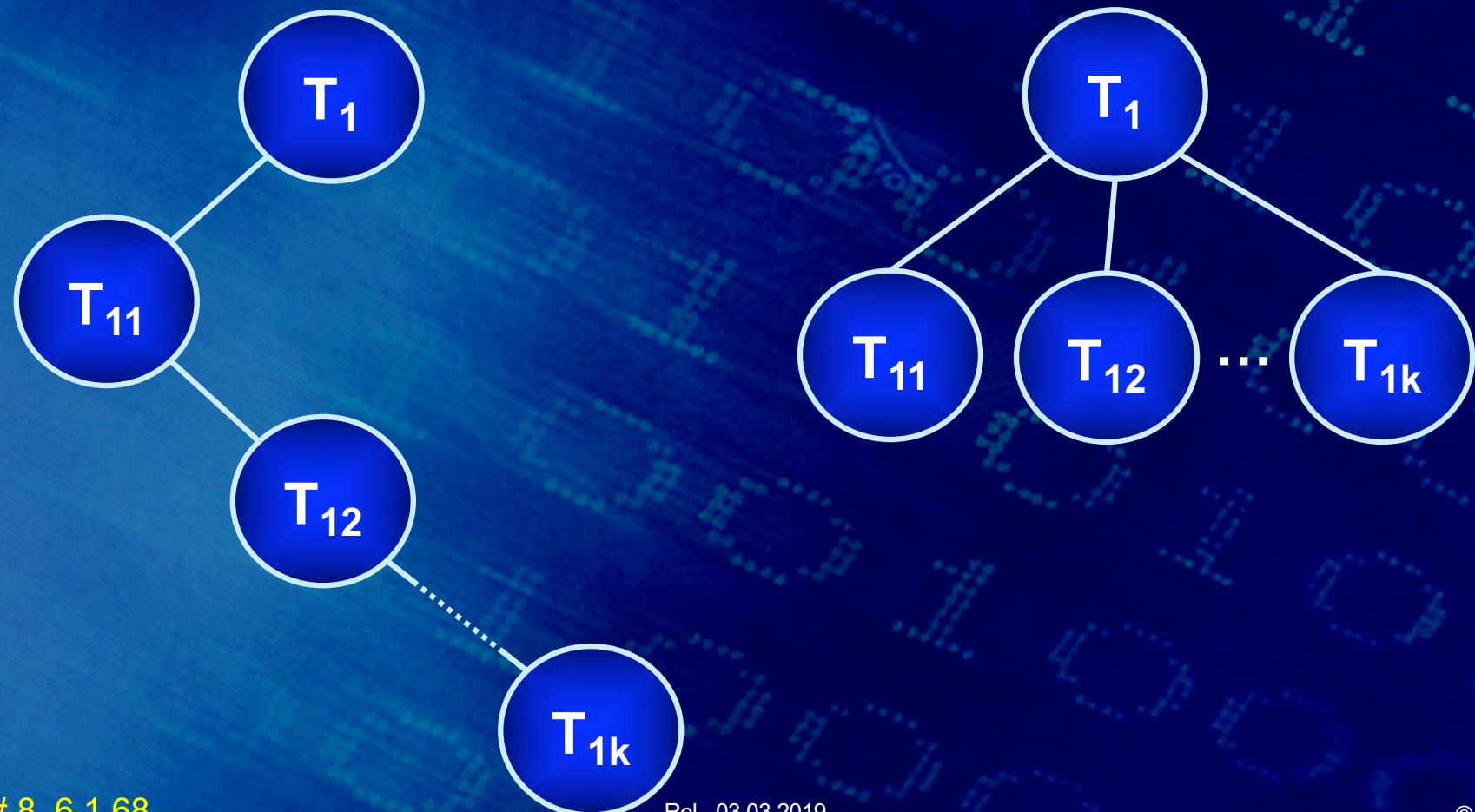
## *Da alberi normali ad alberi binari: esempio (cont'd)*

L'albero ottenuto non sembra un albero binario;  
ruotando di 45° in senso orario si ottiene:

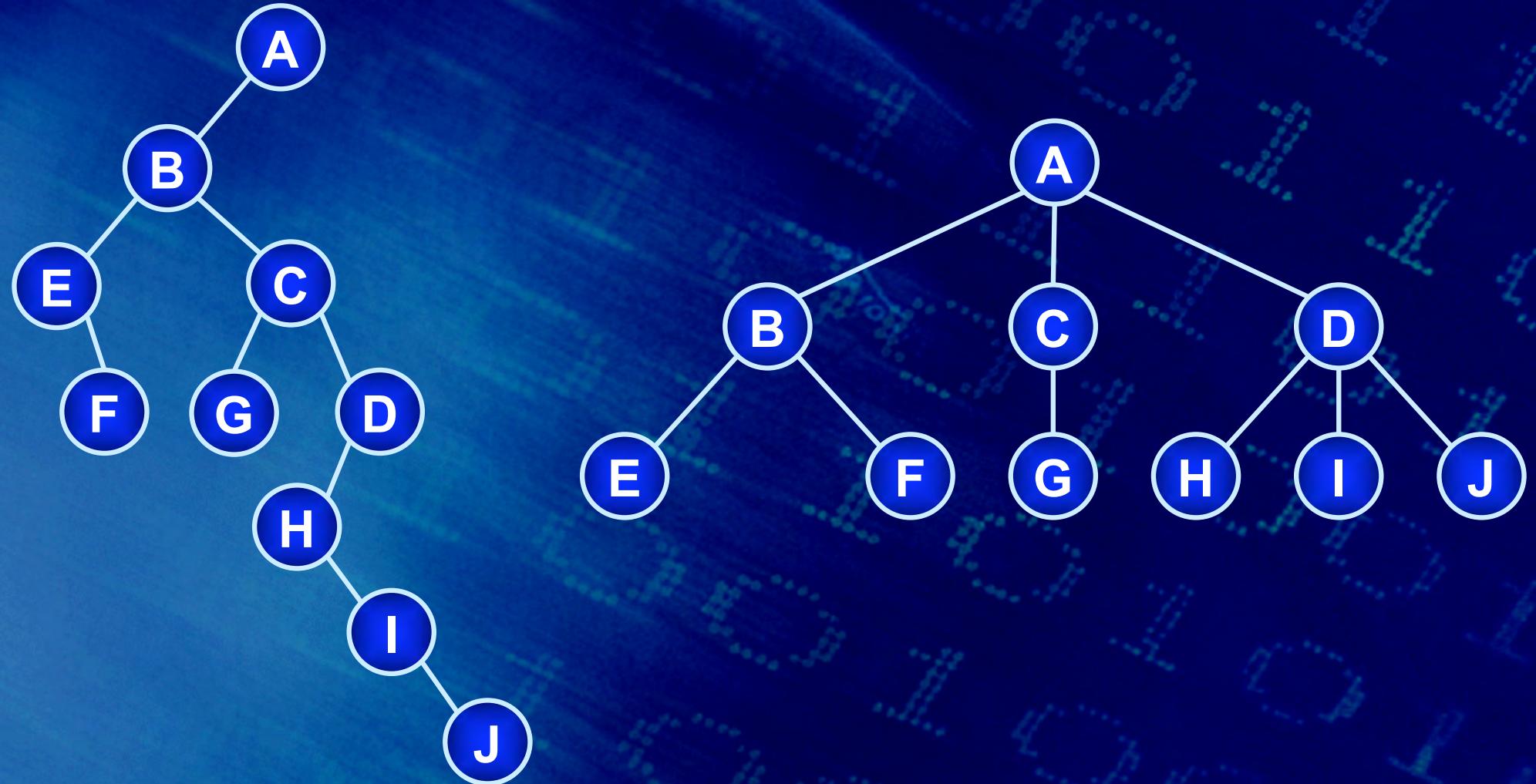


# *Trasformazione binario → normale*

- i figli sinistri rappresentano i figli
- i figli destri rappresentano i fratelli



# Trasformazione binario → normale: esempio



## *Numero di nodi per livello*

- **Numero massimo di nodi per livello**
  - Il numero massimo di nodi aventi profondità  $i$  in un albero binario è pari a  $2^i$

# *Numero di nodi per livello*

- **Numero massimo di nodi complessivi**
  - Il numero massimo  $N_{max}(2,h)$  di nodi in un albero binario di altezza (o profondità, visto che in questo caso coincidono)  $h$  è dato da:

$$N_{max}(2,h) = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

- Ne consegue che l'altezza  $h$  e il numero di nodi  $N$  sono legati dalla seguente relazione:

$$h \geq \log_2(N+1) - 1$$

# *Albero binario completo*

- Un albero binario di altezza  $h$  che contenga esattamente  $2^{h+1} - 1$  nodi è detto **completo**.



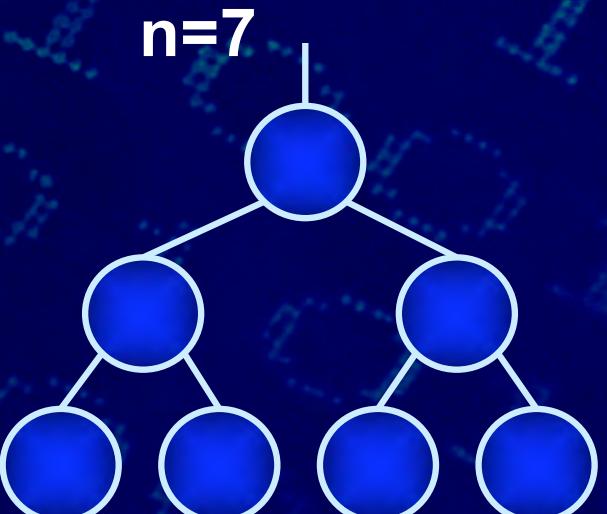
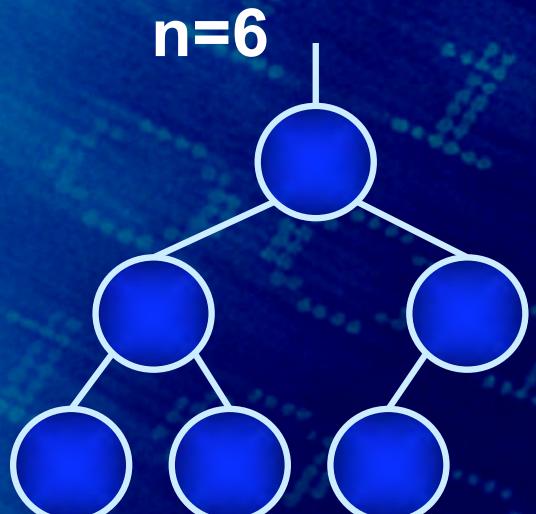
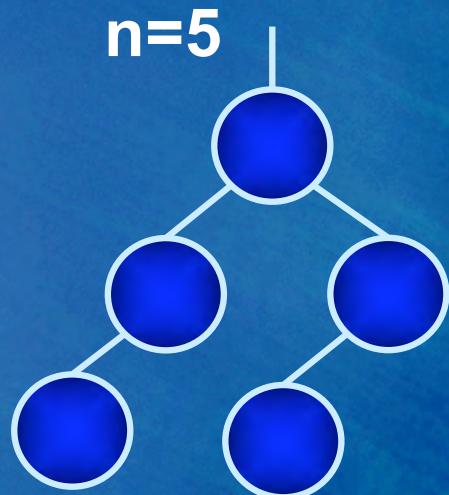
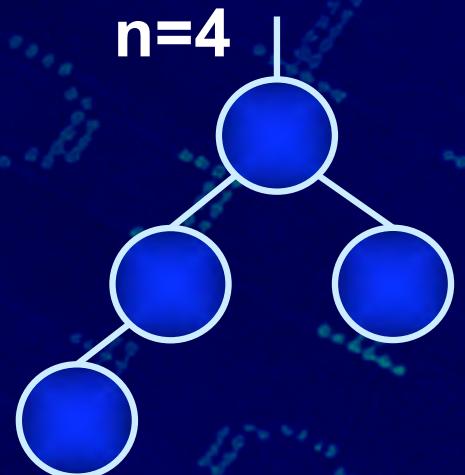
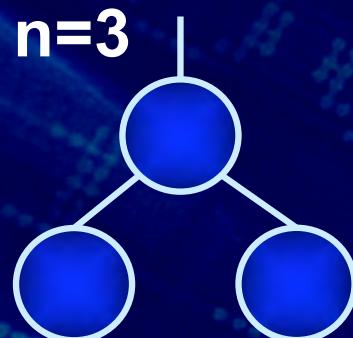
# **Albero binario bilanciato**

Un albero binario si dice **bilanciato (balanced)** se, per ogni nodo, *le altezze del sottoalbero di sinistra e del sottoalbero di destra non differiscono per più di un'unità.*

# **Albero binario perfettamente bilanciato**

Un albero binario bilanciato si dice **perfettamente bilanciato** se, per ogni nodo, il *numero di nodi* del sottoalbero di sinistra e il numero di nodi del sottoalbero di destra non differiscono per più di un'unità.

# *Albero binario perfettamente bilanciato: Esempi*



# *Rappresentazione degli alberi binari*

**Sono possibili soluzioni diverse, tutte interpretabili come variazioni di quelle già viste per gli alberi generici.**

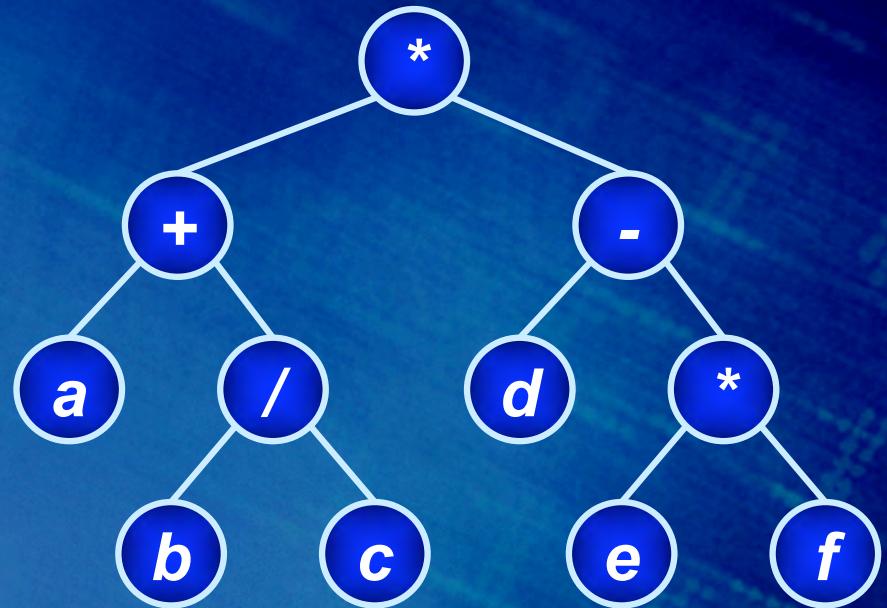
**Esamineremo in particolare le seguenti:**

- **tramite vettore**
- **tramite liste multiple.**

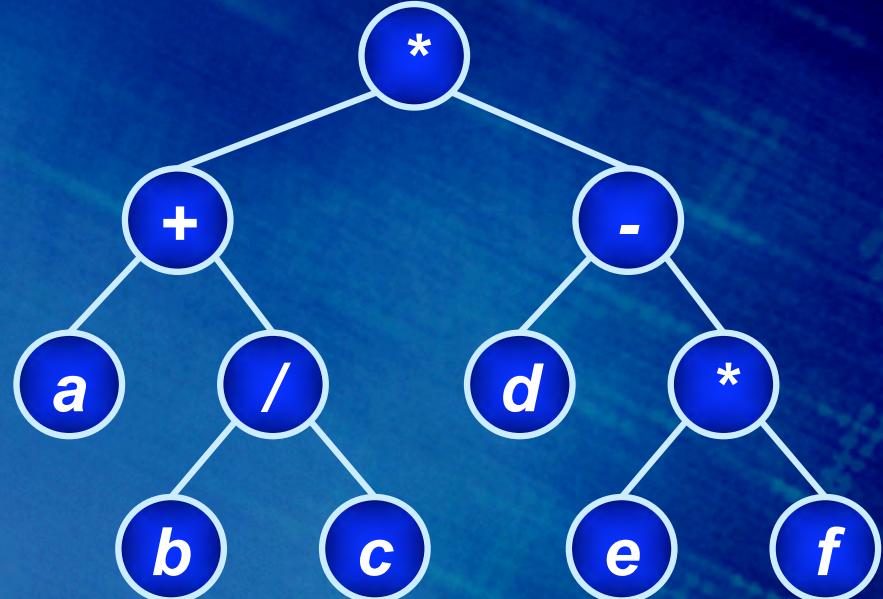
# *Rappresentazione tramite vettore*

- **Se il numero  $m$  di nodi è noto a priori, è possibile ricorrere a un vettore di  $m$  record, ciascuno dei quali contiene, oltre all' $i$ -esimo nodo, anche gli indirizzi dei suoi due figli.**
- **Nel caso in cui risulti particolarmente frequente la necessità di risalire al padre di un determinato nodo, è conveniente aggiungere a ciascun record un quarto campo contenente l'indirizzo del padre del nodo in esame.**

# Rappresentazione tramite vettore: esempio



# Rappresentazione tramite vettore: esempio



1	*	2	3
2	+	6	4
3	-	9	5
4	/	7	8
5	*	10	11
6	a	0	0
7	b	0	0
8	c	0	0
9	d	0	0
10	e	0	0
11	f	0	0

# **Memorizzazione di alberi binari completi**

La memorizzazione di alberi binari completi di  $N$  nodi può essere effettuata in modo particolarmente agevole, come segue:

- si numerano i nodi in ordine progressivo, per livello crescente, da sinistra a destra:



# **Memorizzazione di alberi binari completi**

**(cont'd)**

- si impiega un vettore di  $N$  celle, memorizzando l' $i$ -esimo nodo nella cella  $i$ .

Ne consegue che:

- la radice ha indice 1;
- se un nodo ha indice  $k$ , il figlio di sinistra ha indice  $2k$  e quello di destra  $2k + 1$
- il nodo  $k$ -esimo si trova al livello  $\lfloor \log_2 k \rfloor$
- il primo nodo al livello  $i$  è quello di indice  $2^i$
- il nodo  $k$ -esimo è il  $(k - 2^{\lfloor \log_2 k \rfloor})$ -esimo sul suo livello.

# **Memorizzazione di alberi binari completi**

## **Vantaggi e Svantaggi**

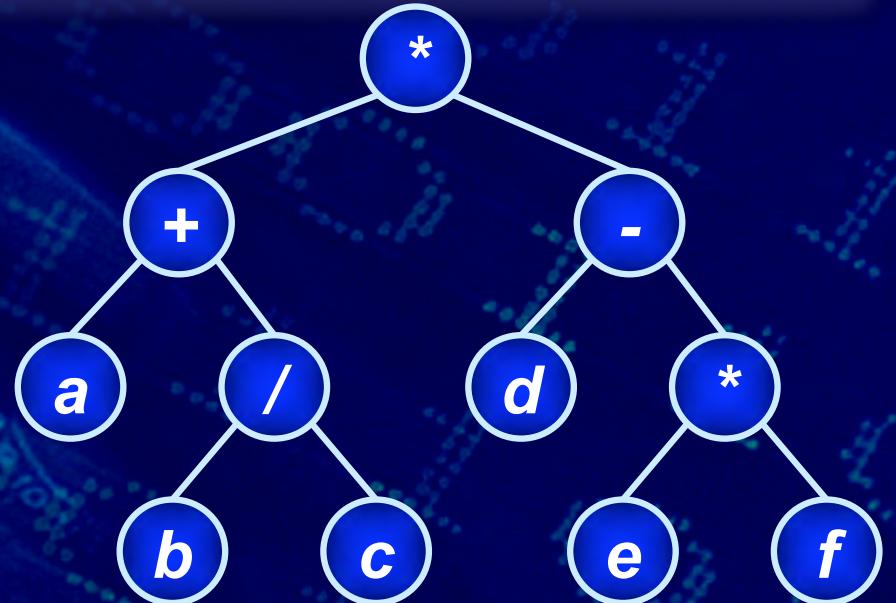
Risulta particolarmente agevole l'implementazione di alcune operazioni, quali:

- $\text{parent}(i, T)$ :
  - se  $i \neq 1$  ritorna  $\lfloor i/2 \rfloor$
  - altrimenti  $i$  è la radice;
- $\text{left\_child}(i, T)$ :
  - se  $2i \leq N$  ritorna  $2i$
  - altrimenti  $i$  non ha figli sinistri;
- $\text{right\_child}(i, T)$ :
  - se  $2i + 1 \leq N$  ritorna  $2i + 1$
  - altrimenti  $i$  non ha figli destri.

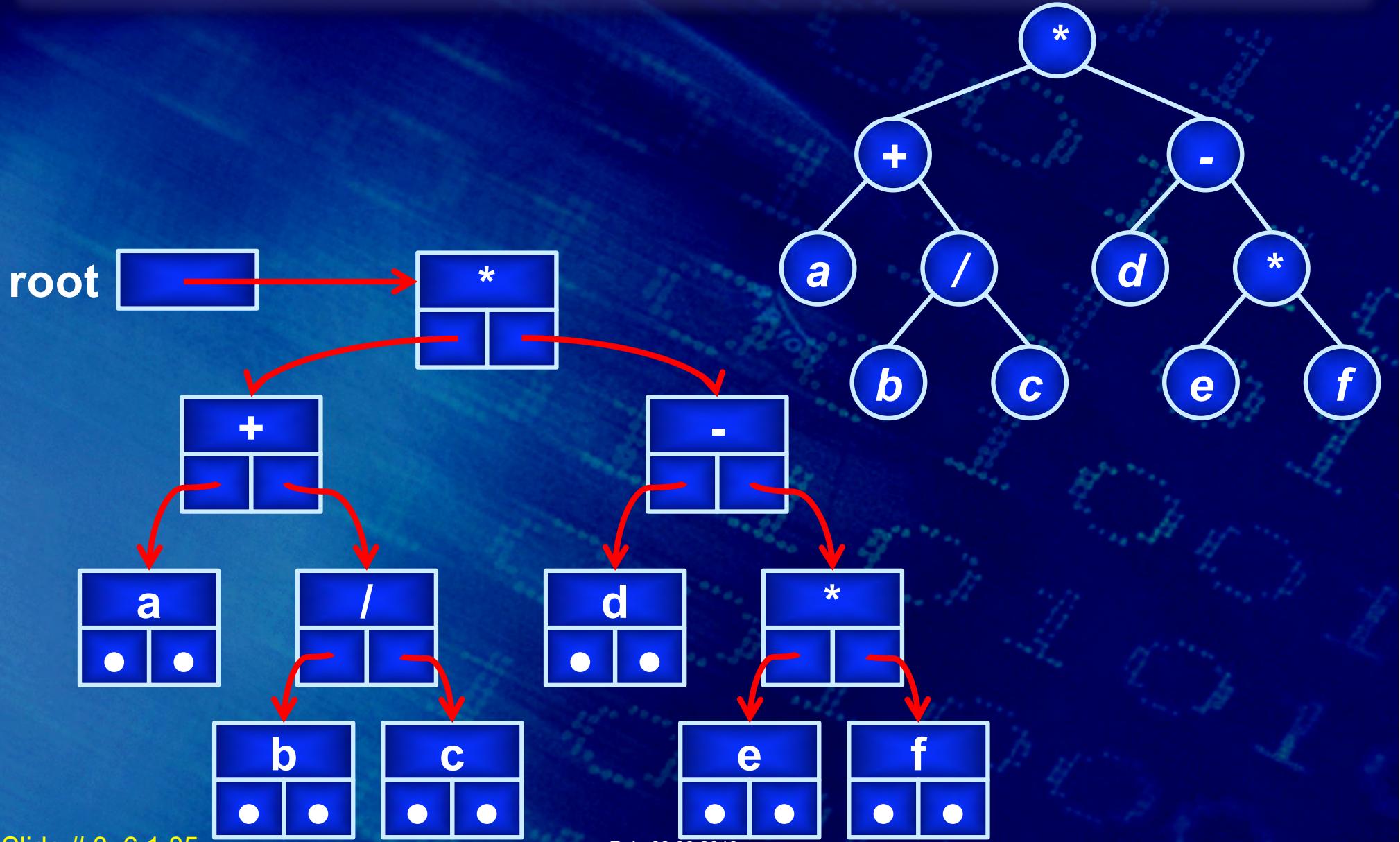
# *Rappresentazione tramite liste multiple*

Ciascun record contiene, oltre all' $i$ -esimo nodo, anche i puntatori ai suoi due figli.

# Rappresentazione tramite liste multiple: esempio



# Rappresentazione tramite liste multiple: esempio



# *Outline*

- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario

# *Visita di un albero binario*

Per **visita (spanning)** o **attraversamento (traversal)** di un **albero binario** si intende l'esame di tutti i nodi dell'albero, in un certo ordine.

A seconda delle specifiche esigenze vengono solitamente effettuati tre tipi di visita, noti come:

- visita in ordine **anticipato (preorder traversal)**
- visita in ordine **misto (inorder traversal)**
- visita in ordine **differito (postorder traversal)**.

# *Preorder*

**Per ogni sottoalbero si visita prima la radice, poi il sottoalbero di sinistra, poi quello di destra.**

**In pratica, il padre prima di tutti i figli.**

# *Preorder*

**Preorder (x)**

**if x ≠ NIL**

**then**

**print key[x]**

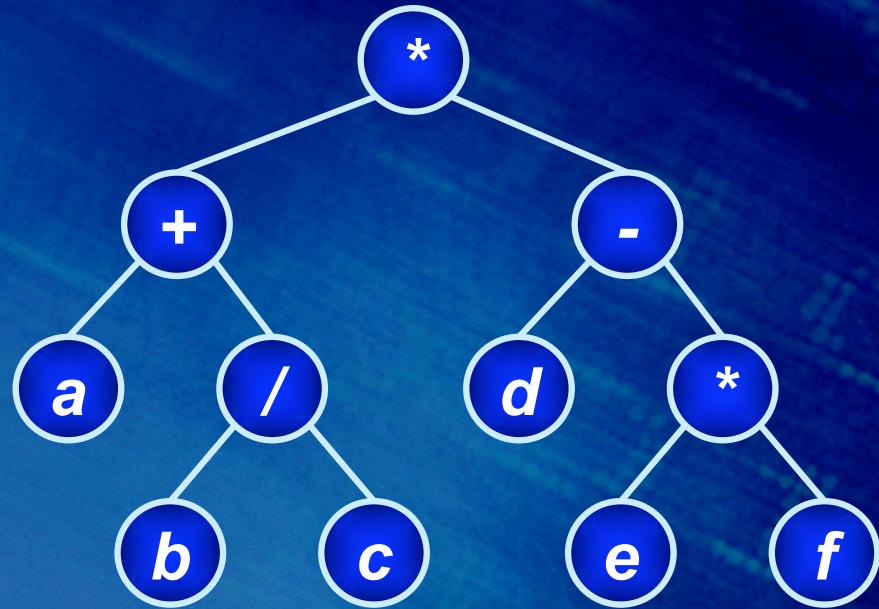
**Preorder ( left[x] )**

**Preorder ( right[x] )**

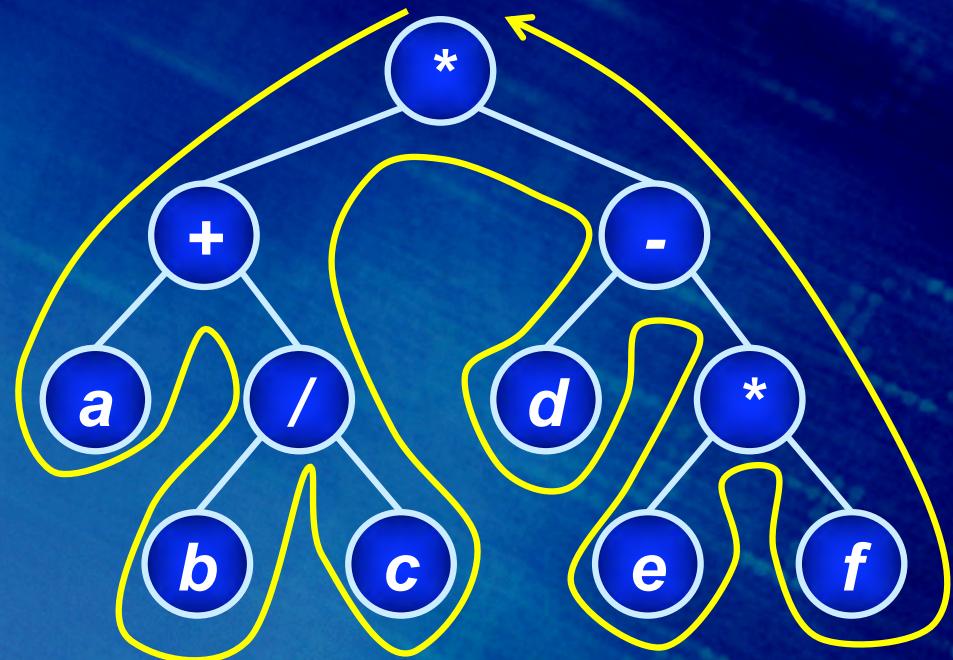
## *Hints for Preorder*

1. Draw a line along the tree
2. Walk through it counterclockwise
3. Visit a node the **1<sup>st</sup>** time you reach it

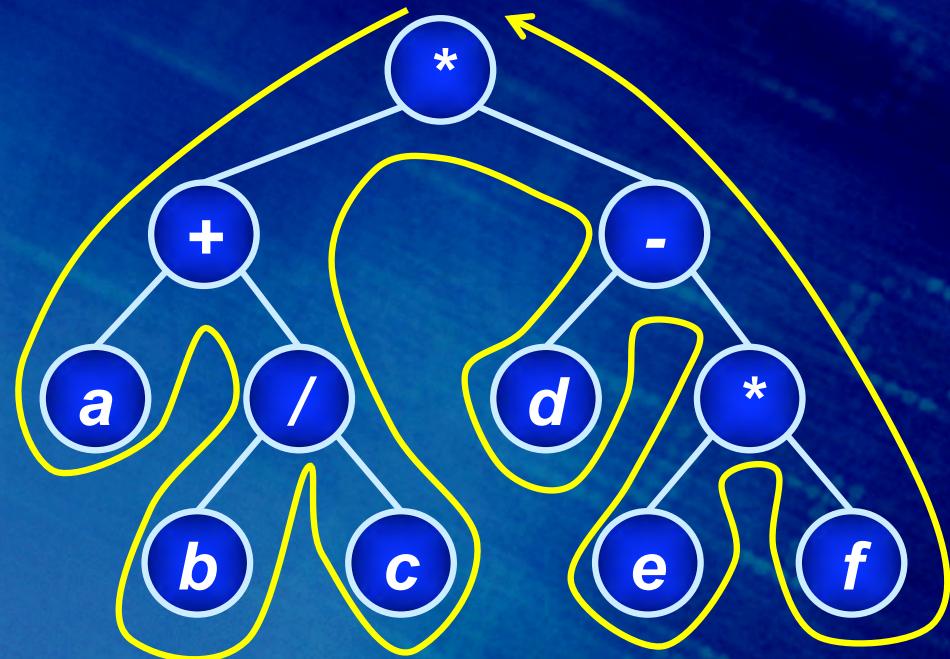
## Visita preorder: Esempio



## Visita preorder: Esempio



## Visita preorder: Esempio



Ordine di visita: \* + a / b c - d \* e f

## *Visita inorder*

**Per ogni sottoalbero si visita prima il sottoalbero di sinistra, poi la radice, poi il sottoalbero di destra.**

**In pratica, il padre dopo il figlio sinistro, ma prima di quello destro.**

# *Inorder*

**Inorder (x)**

**if x ≠ NIL**

**then**

**Inorder ( left[x] )**

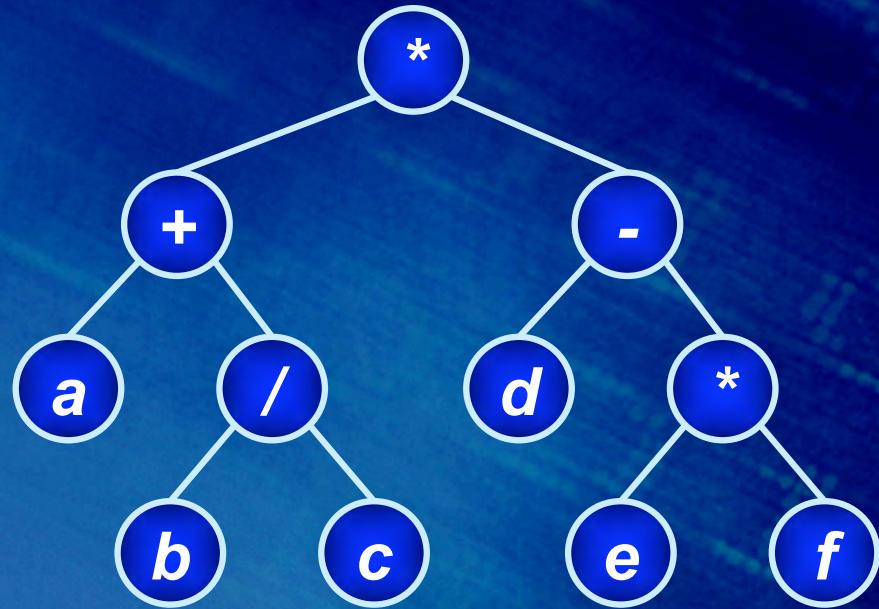
**print key[x]**

**Inorder ( right[x] )**

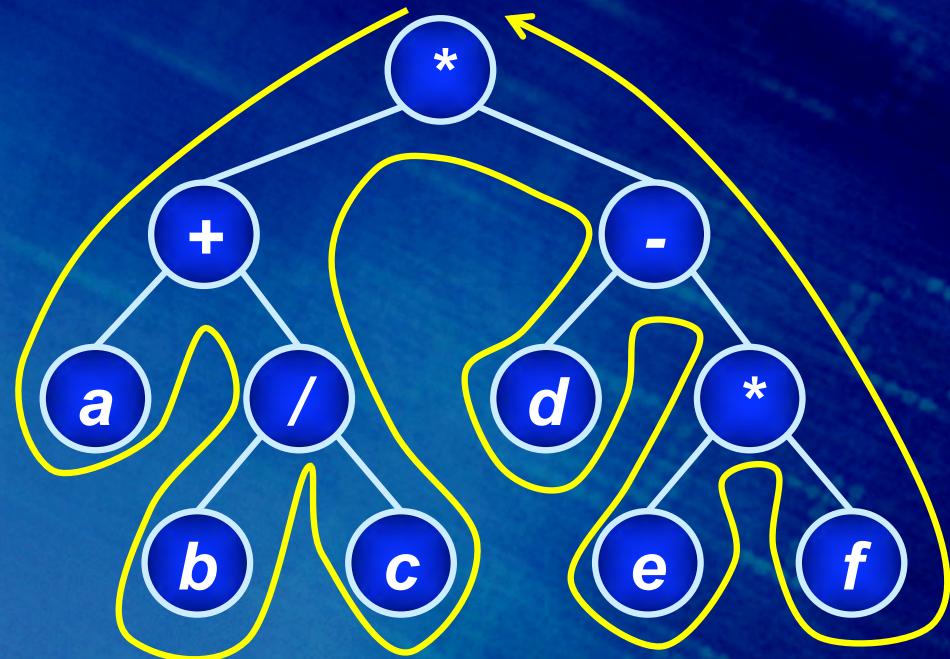
## *Hints for Inorder*

1. Draw a line along the tree
2. Walk through it counterclockwise
3. Visit a node the 2<sup>nd</sup> time you reach it

# Visita inorder: Esempio 1



# Visita inorder: Esempio 1

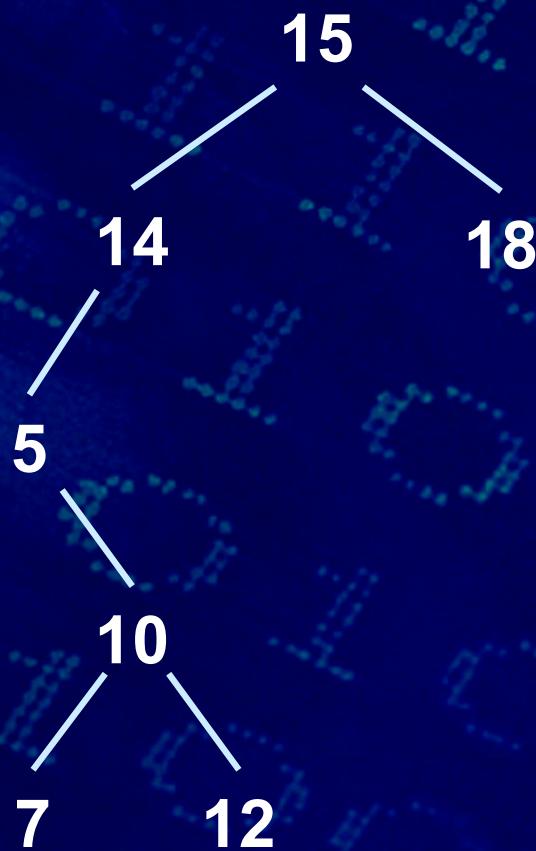


Ordine di visita: a + b / c \* d - e \* f

## *Visita inorder: Esempio 2*



## *Visita inorder: Esempio 3*



## *Visita postorder*

**Per ogni sottoalbero si visita prima il sottoalbero di sinistra, poi quello di destra, poi la radice.**

**In pratica, il padre dopo tutti i figli.**

# *Postorder*

**Postorder (x)**

**if**  $x \neq \text{NIL}$

**then**

**Postorder ( left[x] )**

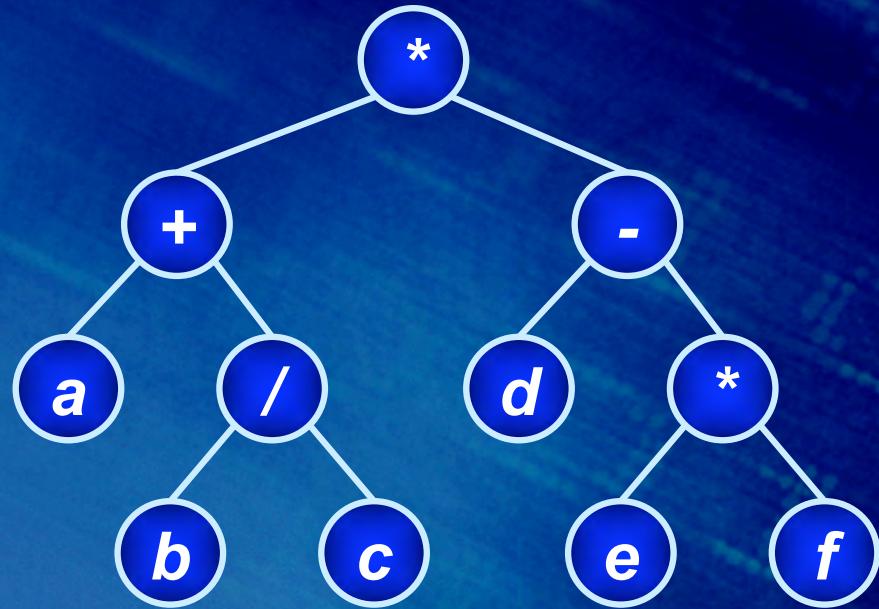
**Postorder ( right[x] )**

**print key[x]**

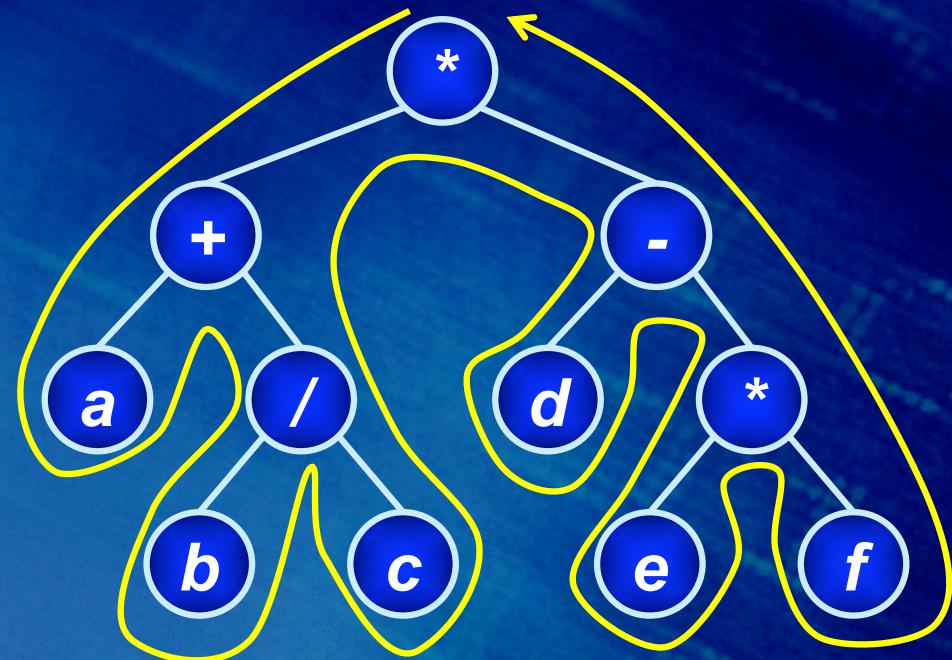
## *Hints for Postorder*

1. Draw a line along the tree
2. Walk through it counterclockwise
3. Visit a node the last time you reach it

## Visita postorder: Esempio



## Visita postorder: Esempio



Ordine di visita: a b c / + d e f \* - \*

# *Outline*

- Concetto di albero
- Operazioni sugli alberi
- Rappresentazione degli alberi
- Alberi binari
- Visita di un albero binario
  - . Esempio di applicazione: Espressioni Aritmetiche

# *Esempio di applicazione: Espressioni Aritmetiche*

La rappresentazione avviene secondo i seguenti criteri:

- le foglie rappresentano gli operandi
- i nodi intermedi rappresentano gli operatori
- i sottoalberi di ogni nodo intermedio rappresentano i termini cui si deve applicare l'operatore.

# *Esempi di applicazione: Espressioni Aritmetiche*

Rappresentazione ad albero dell'espressione:

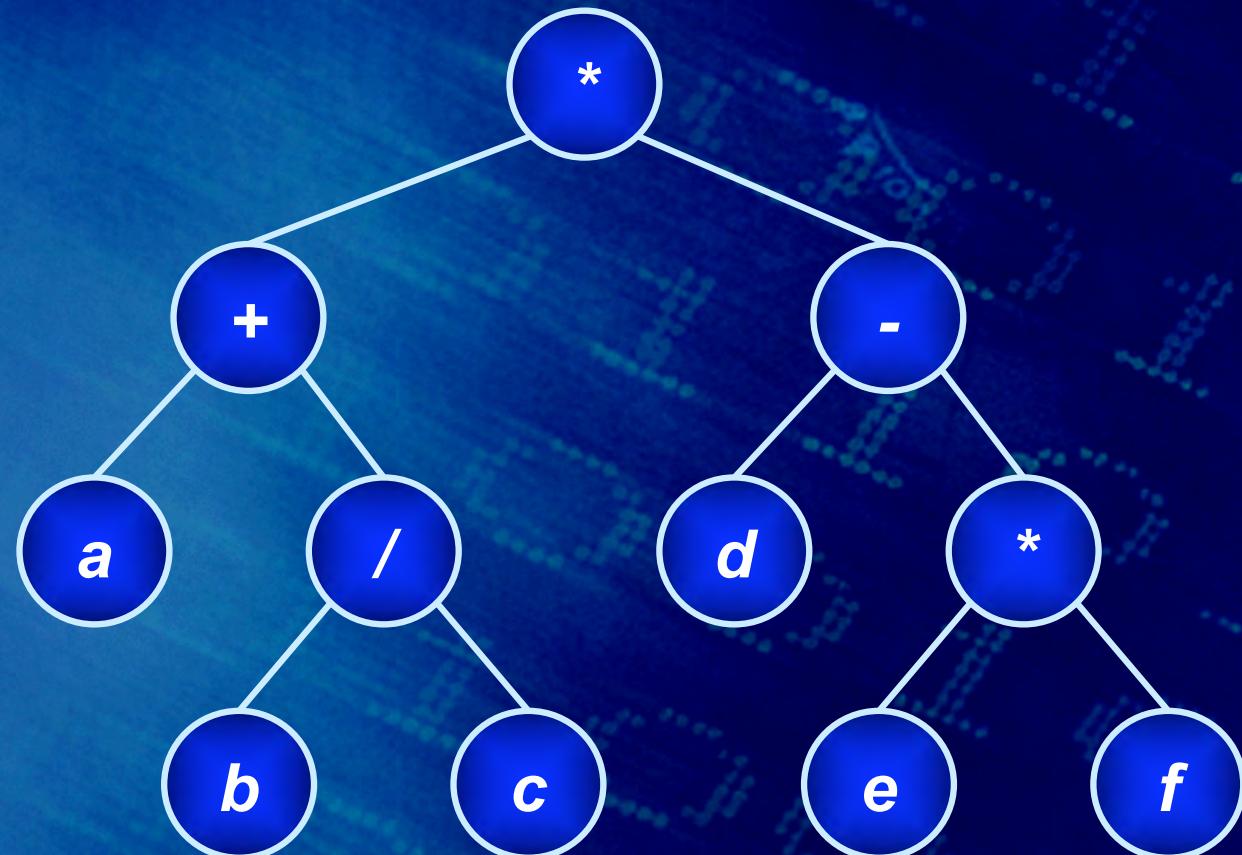
$$(a+b/c)*(d-e*f)$$

# Esempi di applicazione: Espressioni Aritmetiche

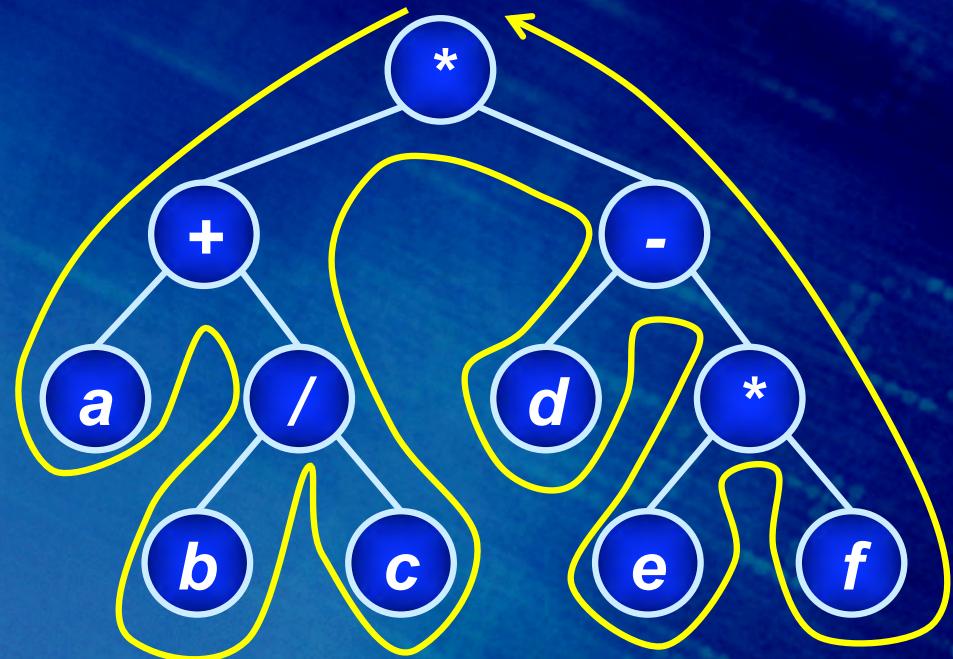
3

Rappresentazione ad albero dell'espressione:

$$(a+b/c)*(d-e*f)$$



# Visita preorder

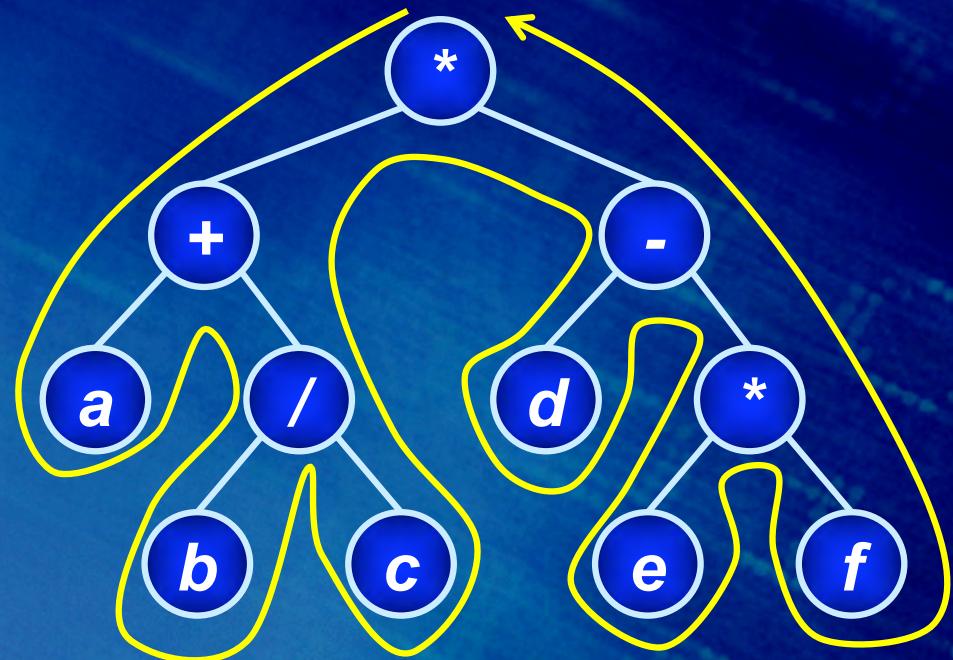


Ordine di visita: \* + a / b c - d \* e f

## *Visita preorder*

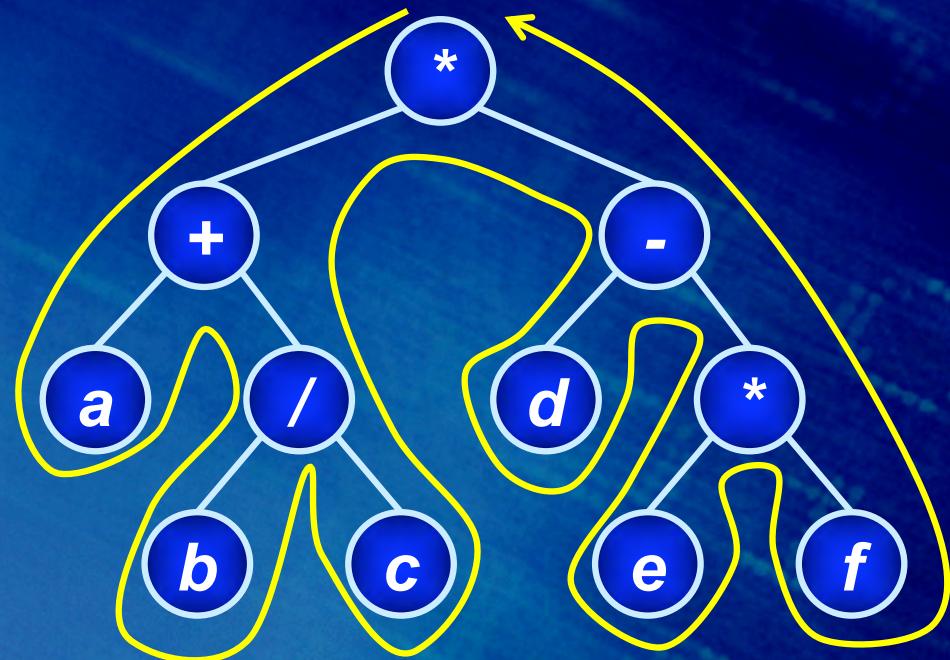
Una visita preorder di un albero in cui sia memorizzata un'espressione aritmetica fornisce una rappresentazione della stessa nella cosiddetta ***notazione prefissa***.

# Visita inorder



Ordine di visita: a + b / c \* d - e \* f

# Visita postorder



Ordine di visita: a b c / + d e f \* - \*

# *Visita postorder*

Una visita postorder di un albero in cui sia memorizzata un'espressione aritmetica fornisce una rappresentazione della stessa nella cosiddetta ***notazione postfissa***, o ***notazione polacca inversa RPN***.

# ***Reverse Polish notation (RPN)***

- ***Reverse Polish notation (RPN)*** is a mathematical notation in which every operator follows all of its operands, in contrast to Polish notation, which puts the operator in the prefix position.
- It is also known as postfix notation and is parenthesis-free as long as operator arities (i.e., the numbers of their operators) are fixed.
- The description "Polish" refers to the nationality of logician Jan Łukasiewicz, who invented the (prefix) Polish notation in the 1920s.

# References

- **A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman:**  
**“Data Structures and Algorithms,”**  
**Addison Wesley, Reading MA (USA), 1983**  
**pp. 75-106**
- **G.H. Gonnet:**  
**“Handbook of Algorithms and Data Structures,”**  
**Addison Wesley, Reading MA (USA), 1984, pp. 69-117**
- **J. Esakow. T. Weiss**  
**“Data structure: an advanced approach using C,”**  
**Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ (USA), 1982, pp. 38-59**

# References

- E. Horowitz, S. Sahni:  
“Fundamentals of Computer Algorithms,”  
Pittman, London (UK), 1978  
pp. 203-271
- R. Sedgewick:  
“Algorithms in C,”  
Addison Wesley, Reading MA (USA), 1990  
pp. 35-50
- C.J. Van Wyk:  
“Data Structures and C Programs,” Addison  
Wesley, Reading MA (USA), 1988  
pp 159-176

# References

- M.A. Weiss:  
**“Data Structures and Algorithm Analysis,”**  
**The Benjamin/Cummings Publishing Company,**  
**Redwood City, CA (USA), 1992, pp. 87-98**
- R.J. Wilson:  
**“Introduzione alla teoria dei grafi,”**  
**Cremonese, Roma 1978, pp. 57-76**
- N. Wirth:  
**“Algorithms + Data Structures = Programs,”**  
**Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ (USA), 1976**  
**pp. 169-263**

Малые Автюхи, Калинковичский район, Республики Беларусь

